Note del corso di Istituzioni di Geometria II modulo, anno 2011-12

Diego Conti

15 maggio 2012

1 Funzioni differenziabili

Sia $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ una funzione, $U \subset \mathbb{R}^d$ aperto.

Definizione 1. La funzione f si dice *differenziabile* in $x \in U$ se esiste un'applicazione lineare $df_x\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x+h) - f(x) = df_x(h) + o(h).$$

- Se f è differenziabile in x, le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ esistono in x e sono uguali a $df_x(e_i)$.
- Viceversa se le derivate parziali di f esistono continue in U, allora f è differenzabile.

Due formule utili:

(i) Se $f\colon U \to V$ è differenziabile in x, dove $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ sono aperti, e $g\colon V \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $f(x)$, allora $g \circ f$ è differenziabile in x e

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Questa equazione si chiama anche *chain rule.*

Dimostrazione. Sia $f(x) = y$, $f(x+h) = y + k$; allora

$$g(y+k) - g(y) = dg_y(k) + |k|\,\psi(k), \qquad \lim_{k \to 0} \psi(k) = 0;$$

d'altra parte $k = df_x(h) + o(h)$ quindi

$$g(y+k) - g(y) = dg_y(df_x(h) + o(h)) + |k|\,\psi(k);$$

infine

$$|k|\,\psi(k) = o(h).$$

□

(ii) Se $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ sono differenziabili in x, allora fg è differenziabile in x e

$$d(fg)_x = f(x)dg_x + g(x)df_x.$$

Dimostrazione.

$$f(x+h)g(x+h) = (f(x) + df_x(h) + o(h))(g(x) + dg_x(h) + o(h)).$$ □

Definizione 2. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{R}$ si dice (di classe) C^∞ se esistono continue tutte le derivate parziali[1]

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Una funzione $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ è C^∞ se e solo se lo sono le sue componenti.

[1] In alcuni testi, differenziabile e C^∞ sono usati come sinonimi

- Per $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di classe C^∞ vale la formula di Taylor
$$g(1)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}+\dots+\frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)dt,$$
che si dimostra per induzione integrando per parti. Per $f\colon U\to\mathbb{R}$ con U aperto di $\mathbb{R}^n$, ponendo $g(t)=f(x+tv)$, si trova la formula di Taylor
$$f(x+v)=f(x)+\frac{D_vf(x)}{1!}+\dots+\frac{D_v^{n-1}f(x)}{(n-1)!}+\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}D_v^nf(x+tv)dt.$$
- Date $f,g\colon U\to\mathbb{R}$ funzioni C^∞, $f+g$ e fg sono C^∞. Se $g\neq 0$ ovunque, allora f/g è C^∞.

La composizione di funzioni C^∞ è C^∞:

Proposizione 3. *Se $U\subset\mathbb{R}^d, V\subset\mathbb{R}^n$ sono aperti, ed $f\colon U\to V$, $g\colon V\to\mathbb{R}$ sono C^∞, allora $g\circ f$ è C^∞.*

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su k che, date f,g come nell'enunciato, $g\circ f$ ammette derivate parziali continue di ordine k. Se $k=0$, non c'è niente da dimostrare.

Supponiamo che valga per k. Date f e g, dimostriamo che esiste continua
$$\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_d}(g\circ f)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}.$$
per $k+1=\alpha_1+\dots+\alpha_d$. Supponiamo $\alpha_1>0$; allora dobbiamo dimostrare che esiste continua
$$\frac{\partial^{\alpha_1-1+\dots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1-1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\frac{\partial}{\partial x_1}(g\circ f)(p)=\frac{\partial^{\alpha_1-1+\dots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1-1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\sum_k\frac{\partial g}{\partial y^k}(f(p))\frac{\partial f^k}{\partial x_1}(p).$$
La funzione $\frac{\partial g}{\partial y^k}$ è C^∞; per ipotesi induttiva, $\frac{\partial g}{\partial y^k}\circ f$ ammette derivate parziali continue di ordine fino a k. Inoltre le $\frac{\partial f^k}{\partial x_1}$ sono C^∞; quindi, applicando ripetutamente la regola di Leibniz si trova che $\frac{\partial g}{\partial y^k}(f(p))\frac{\partial f^k}{\partial x_1}(p)$ ammette derivate parziali continue di ordine fino a k.

□

Esercizio 1. Dimostrare che
$$\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \phi(x)=\begin{cases}e^{-1/x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$
è C^∞.

Esercizio 2. Costruire una mappa C^∞, $\psi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tale che $\psi\equiv 0$ su $(-\infty,0)$ e $\psi\equiv 1$ su $(0,+\infty)$.

Esercizio 3. Se $f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ è lineare, allora per ogni $x\in\mathbb{R}^d$ si ha $df_x=f$.

Esercizio 4. Dimostrare che la mappa
$$\psi\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d+1},\psi(y_1,\dots,y_d)=\left(\frac{2}{1+|y|^2}y_1,\dots,\frac{2}{1+|y|^2}y_d,\frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}\right)$$
è C^∞ e calcolarne il differenziale.

2 Varietà [5]

Una varietà è un oggetto geometrico su cui si può fare il calcolo differenziale. Più precisamente, si danno le seguenti definizioni.

- Uno *spazio locamente euclideo* di dimensione d è uno spazio topologico di Hausdorff tale che ogni punto ha un intorno omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^d$. Un *sistema di coordinate o carta* è un omeomorfismo di un aperto connesso $U \subset M$ con un aperto di $\mathbb{R}^d$. L'inversa di una carta si chiama *parametrizzazione*. Una carta (U, ϕ) è centrata in p se $U \ni p$ e $\phi(p) = 0$. Due carte (U, ϕ), (V, ψ) determinano una mappa

$$\phi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)} \colon \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V).$$

  detta *cambiamento di carta*.

- Un atlante differenziabile su uno spazio localmente euclideo di dimensione d è un insieme $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ dove $\phi_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^d$ sono carte, gli U_α ricoprono M e i cambiamenti di carta sono C^∞.

- Una *struttura differenziabile* (o struttura C^∞) è un atlante massimale. Ogni atlante è contenuto in un unico atlante massimale, quindi per determinare una struttura differenziale è sufficiente dare un atlante.

- Una *varietà* (differenziabile, o liscia, o C^∞) è uno spazio localmente euclideo a base numerabile con una struttura differenziabile fissata.

Per capire il tipo di fenomeno che la condizione di Hausdorff permette di escludere, si consideri il quoziente

$$X = \mathbb{R} \times \{0,1\}/\sim, \quad (x, y) \sim (x', y') \iff x = x' \wedge (y = y' \vee x \neq 0)$$

dove $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ ha la topologia indotta dall'inclusione in $\mathbb{R}^2$, e X la topologia quoziente. Allora X è sicuramente a base numerabile, localmente euclideo, con carte date dalle mappe f_0 e f_1:

$$f_\epsilon \colon X \setminus \{[0, \epsilon]\} \to \mathbb{R}, \quad f_\epsilon(x, y) = x, \quad \epsilon = 0, 1.$$

I cambiamenti di carta $f_0 \circ (f_1)^{-1}$ e $f_1 \circ (f_0)^{-1}$ sono restrizioni dell'identità, quindi C^∞. Tuttavia, X non è di Hausdorff. Infatti, siano U_1 e U_0 due intorni aperti di $[0,1]$ e $[0,0]$ rispettivamente. Allora $\pi^{-1}(U_1)$ e $\pi^{-1}(U_0)$ sono aperti in $\mathbb{R} \times \{0,1\}$. Quindi per x vicino a 0, $\pi^{-1}(U_0)$ contiene $(x, 0)$ e $\pi^{-1}(U_1)$ contiene $(x, 1)$: poichè $\pi^{-1}(U_0)$ e $\pi^{-1}(U_1)$ sono unione di classi di equivalenza, si intersecano necessariamente.

Osservazione. È noto, anche se non facile da dimostrare, che alcuni spazi localmente euclidei (ad esempio $\mathbb{R}^4$) possono avere piú di una struttura differenziabile, e che esistono spazi localmente euclidei che non ammettono alcuna struttura differenziabile.

Sono esempi di varietà, con una struttura di varietà canonica:

(i) Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^d$. L'identità $\mathrm{Id} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è una carta, e $\{(\mathbb{R}^d, \mathrm{Id})\}$ costituisce un atlante.

(ii) Uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita. Gli isomorfismi $V \to \mathbb{R}^d$ sono le carte di un atlante; i cambiamenti di carta sono mappe lineari

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

per le quali vale

$$df_x = f, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

e quindi sono C^∞.

(iii) Uno spazio affine V di dimensione finita; gli isomorfismi affini $V \to \mathbb{R}^d$ sono le carte di un atlante, con cambiamenti di carta affini.

(iv) Uno spazio vettoriale complesso V, con carte date da isomorfismi $V \to \mathbb{C}^d \equiv \mathbb{R}^{2d}$.

(v) La sfera S^d. Una carta è data dalla proiezione stereografica dal polo nord

$$\phi_N(x_1, \dots, x_{d+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{1 - x_{d+1}}\right)$$

che è un omeomorfismo con l'immagine $\mathbb{R}^d$ perchè ha un'inversa continua

$$\psi_N(y_1, \dots, y_d) = \left(\frac{2}{1 + |y|^2} y_1, \dots, \frac{2}{1 + |y|^2} y_d, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\right).$$

La proiezione stereografica dal polo sud ha la forma

$$\phi_S(x_1, \dots, x_{d+1}) \to \left(\frac{x_1}{1 + x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{1 + x_{d+1}}\right)$$

e la sua inversa è

$$\psi_S(y_1, \dots, y_d) \to \left(\frac{2}{1 + |y|^2} y_1, \dots, \frac{2}{1 + |y|^2} y_d, \frac{1 - |y|^2}{1 + |y|^2}\right).$$

Adesso $\{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ definisce una struttura differenziabile su S^d perchè

$$\phi_N \circ \psi_S \colon \phi_S(U_N \cap U_S) \to \phi_N(U_N \cap U_S), \quad (y_1, \dots, y_n) \to \frac{2}{|y|^2}(y_1, \dots, y_n)$$

è C^∞, e lo stesso vale per $\phi_S \circ \psi_N$.

(vi) Un aperto W di una varietà differenziabile M con la struttura indotta: se (U, ϕ) è una carta su M, allora $(U \cap W, \phi|_{U \cap W})$ è una carta su W.

(vii) Il prodotto cartesiano di varietà: se (U, ϕ), (V, ψ) sono carte su M, N rispettivamente, allora $(U \times V, \phi \times \psi)$ sono carte su $M \times N$.

Avendo definito gli oggetti in cui siamo interessati, definiamo la classe di mappe.

Definizione 4. Se M, N sono varietà:

(i) una funzione $f: M \to \mathbb{R}^n$ si dice C^∞ se per ogni carta $\phi: U \to \mathbb{R}^d$ si ha che $f \circ \phi^{-1}$ è C^∞.

(ii) una funzione $f: M \to N$ si dice C^∞ se è continua e per ogni carta $\psi: U \to \mathbb{R}^n$ di N si ha che $\psi \circ f: f^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ è C^∞ nel senso di (i).

Verifichiamo che questa definizione è consistente ed estende la definizione di mappa C^∞ della sezione precedente.

- Se $M = \mathbb{R}^d$ con la struttura C^∞ standard, allora $f: M \to \mathbb{R}^n$ soddisfa la definizione (i) se e solo è C^∞ (qui inteso nel senso della sezione precedente). Infatti, se ϕ è una carta, allora ϕ^{-1} è C^∞, e quindi $f \circ \phi^{-1}$ è la composizione di funzioni C^∞, quindi C^∞. Viceversa, se $f \circ \phi^{-1}$ è C^∞ per ogni carta $\phi: U \to \mathbb{R}^d$, allora possiamo prendere $\phi = \mathrm{Id}$ e concludere che f è C^∞.

- Se $N = \mathbb{R}^n$, allora $f: M \to N$ soddisfa la definizione (i) se e solo se soddifa (ii). Infatti se vale (ii) possiamo prendere $\psi = \mathrm{Id}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e quindi vale (i). Viceversa se vale (i) allora per ogni carta $\phi: U \to \mathbb{R}^d$ si ha che $f \circ \phi^{-1}$ è C^∞, quindi anche $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è C^∞ per ψ carta di $N = \mathbb{R}^n$. Quindi $\psi \circ f$ soddisfa (i).

- Una carta ϕ e la sua inversa sono C^∞, perchè i cambiamenti di carte sono C^∞.

Proposizione 5. *Una mappa continua $f: M \to N$ è C^∞ se e solo se per ogni x in M esiste una carta ϕ di M centrata in x e una carta ψ di N centrata in $f(x)$ tali che $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è C^∞ sull'aperto in cui è definita.*

Dimostrazione. "Solo se" è ovvio.

Viceversa, se vale la condizione dell'enunciato, dobbiamo dimostrare che per ogni carta $\tilde{\psi}: V \to \mathbb{R}^n$ di N, $\tilde{\psi} \circ f: f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^n$ è C^∞. Cioè, per ogni carta $\tilde{\phi}: \tilde{U} \to \mathbb{R}^d$ di M deve essere C^∞ la mappa

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}: \tilde{\phi}(f^{-1}(V) \cap \tilde{U}) \to \mathbb{R}^n$$

Prendiamo $x \in f^{-1}(V) \cap U$; per ipotesi esiste una carta $\phi: U \to \mathbb{R}^d$ centrata in x e una carta ψ di N centrata in $f(x)$ tale che $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è C^∞. In un intorno di $\tilde{\phi}(x)$ possiamo scrivere

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1} = \tilde{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$$

quindi $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}$ è C^∞ nell'intorno, in quanto composizione di funzioni C^∞. Quindi tutte le derivate parziali esistono continue in un intorno di x; al variare di x troviamo che $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}$ è C^∞. □

Corollario 6. *Una mappa $f: M \to N$ è C^∞ se e solo se esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M tale che $f|_{U_\alpha}: U_\alpha \to N$ è C^∞.*

Corollario 7. *La composizione di mappe C^∞ è C^∞.*

Esercizio 5. Sia S^d la sfera. Dimostrare che l'applicazione

$$f: S^d \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots, x_{d+1}) = x_1$$

è C^∞.

3 Partizioni dell'unità [1, 5]

Una peculiarità della teoria delle varietà C^∞ deriva dall'esistenza di una funzione come nell'Esercizio 1. Questo permette di dimostrare il seguente:

Teorema 8. *Sia M una varietà, e sia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un ricoprimento aperto di M. Allora esiste una successione $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni C^∞ su M tali che*

- $0 \leq \phi_k \leq 1$;
- *ogni $x \in M$ ha un intorno in cui solo un numero finito dei ϕ_k sono non-zero;*
- $\operatorname{supp}\phi_k \subset U_{\alpha_k}$ *per qualche successione α_k in I;*
- $\sum \phi_k \equiv 1$ *(somma localmente finita).*

Si dice allora che $\{\phi_k\}$ è una *partizione dell'unità* subordinata a $\{U_\alpha\}$.

Il *supporto* di ϕ_k è la chiusura di $\phi_k^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Si dice che un insieme $U \subset M$ è *relativamente compatto* se la chiusura di U in M è compatta.

Lemma 9. *Ogni varietà è unione numerabile di compatti.*

Dimostrazione. Sia B una base numerabile. Prendiamo la famiglia di aperti $B' = \{U \in B \mid U \text{ relativamente compatto}\}$. Ogni punto x ha un intorno compatto C, e quindi $x \subset U_x \subset C_x$ per qualche $U_x \in B$. Inoltre C_x è chiuso perchè le varietà sono spazi di Hausdorff, e quindi $\overline{U_x} \subset C_x$. Dunque $U_x \in B'$, quindi B' è un ricoprimento. Se prendo le chiusure degli aperti di B' trovo un ricoprimento numerabile compatto. □

Lemma 10. *Sia $K \subset U \subset M$ dove M è una varietà, K è compatto e U è aperto. Allora esiste una funzione C^∞ $f\colon M \to \mathbb{R}$ che è non negativa su M, positiva su K e ha supporto contenuto in U.*

Dimostrazione. Per ogni p in K prendo una carta centrata in p,

$$\phi_p = (\phi_p^1, \dots, \phi_p^1)\colon V \to \mathbb{R}^d.$$

A meno di restringere V posso supporre $V \subset U$. Allora $\phi_p(V)$ è un intorno di 0, e quindi contiene un prodotto di intorni $[-\delta,\delta]^d$. Se ψ è la funzione

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$

allora la funzione

$$x \to \psi(x+\delta)\psi(\delta - x)$$

è non-zero in 0 e si annulla al di fuori di $(-\delta,\delta)$. Quindi la funzione

$$f_p\colon M \to \mathbb{R}, \quad f_p(x) = \begin{cases} \prod_{i=1}^d \psi(\phi_p^i(x)+\delta)\psi(\delta - \phi_p^i(x)) & x \in V \\ 0 & x \notin V \end{cases}$$

è una funzione C^∞, perchè lo è in V e nel complementare del chiuso $\phi_p^{-1}([-\delta,\delta]^d)$. Inoltre per costruzione f_p è non negativa, $f_p(p) > 0$, e

$$\operatorname{supp} f_p \subset \phi_p^{-1}([-\delta,\delta]^d).$$

Adesso gli aperti $f_p^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ ricoprono K; ne estraggo un sottoricoprimento finito, e sommo le funzioni corrispondenti, diciamo $f = f_{p_1} + \ldots + f_{p_k}$. La funzione f così ottenuta si annulla al di fuori del chiuso

$$\phi_{p_1}^{-1}([-\delta,\delta]^d) \cup \cdots \cup \phi_{p_k}^{-1}([-\delta,\delta]^d) \subset U$$

e quindi ha supporto contenuto in U. $\square$

Dimostrazione del Teorema 8. Per il lemma M è unione numerabile di compatti, diciamo $M = \bigcup_{n\geq 0} K_n$. Possiamo supporre $K_n \subset Int(K_{n+1})$ per locale compattezza. Infatti ogni compatto K_n è ricoperto da aperti relativamente compatti, e per compattezza posso prenderli in numero finito, diciamo $V_1^n, \ldots, V_{k_n}^n$. Quindi se K_n non è contenuto in $Int(K_{n+1})$ posso rimpiazzare K_{n+1} con

$$K_{n+1} \cup \overline{V_1^n} \cup \cdots \cup \overline{V_{k_n}^n}.$$

Procedendo induttivamente trovo una successione di compatti con la proprietà richiesta.

Posso supporre inoltre $K_0 = \emptyset = K_1$. Per ogni $n \geq 0$, consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F}_n = \{V \text{ aperto di } M \text{ relativamente compatto } \mid \overline{V} \text{ contenuto in qualche } U_\alpha \backslash K_n\}.$$

Questo è un ricoprimento aperto di $M \setminus K_n$, quindi posso estrarne un sottoricoprimento finito di $K_{n+2} \setminus Int(K_{n+1})$. Per ogni aperto V del sottoricoprimento, prendo una funzione $\eta_V\colon M \to \mathbb{R}$ che è C^∞, non negativa, positiva su V e ha supporto contenuto in qualche $U_\alpha \setminus K_n$; posso farlo perchè $\overline{V}$ è compatto e contenuto in $U_\alpha \setminus K_n$. Al variare di V nel sottoricoprimento finito, trovo una sequenza finita di funzioni C^∞ non negative, con supporto ognuna in qualche $U_\alpha \setminus K_n$, con la proprietà che in ogni punto di $K_{n+2} \setminus Int(K_{n+1})$ almeno una è diversa da zero.

Al variare di n, trovo una successione di funzioni η_k che hanno ognuna supporto contenuto in qualche $U_\alpha \setminus K_n$, e con la proprietà che in ogni punto di M almeno una è diversa da zero. Inoltre in ogni aperto $Int(K_n)$ soltanto un numero finito di funzioni non sono identicamente zero, perchè quelle che ottengo al passo k hanno supporto contenuto in $U_\alpha \setminus K_k \subset U_\alpha \setminus K_n$ se $k > n$.

Quindi la somma è ben definita, diciamo $\eta = \sum \eta_k$, e diversa da zero. Adesso prendiamo $\phi_k = \eta_k/\eta$. $\square$

Esercizio 6. Sia M una varietà, $U \subset M$ un aperto, e $f\colon U \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ con $\operatorname{supp} f \subset U$. Dimostrare che f si estende a una funzione $\tilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$.

In particolare, dati due chiusi disgiunti di una varietà si può sempre trovare una funzione C^∞ che vale identicamente uno su una e zero sull'altra, generalizzando il Lemma 10:

Esercizio 7. Siano U, V due chiusi disgiunti di una varietà M. Dimostrare che esiste $f\colon M \to \mathbb{R}$ C^∞ tale che $0 \leq f \leq 1$ e $f|_U \equiv 0$, $f|_V \equiv 1$. Si dice che le funzioni C^∞ *separano i chiusi.*

Esercizio 8. Sia M una varietà e siano U, V due aperti di M, $U \cup V = M$. Allora esiste una partizione dell'unità del ricoprimento $\{U, V\}$ composta da due sole funzioni.

4 Esempi

Esercizio 9. Sia $\mathbb{RP}^n$ lo spazio proiettivo reale di dimensione n. Dimostrare che le carte affini

$$\phi_j\colon \{X_j \neq 0\} \to \mathbb{R}^n, \quad \phi_j[X_0 : \dots : X_n] = \left(\frac{X_0}{X_j}, \dots, \widetilde{\frac{X_j}{X_j}}, \dots, \frac{X_n}{X_j}\right)$$

danno a $\mathbb{RP}^n$ la struttura di varietà.

Esercizio 10. Dimostrare che la mappa $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ è C^∞.

Esercizio 11. Dimostrare che la mappa

$$f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^5, \quad [X_0 : X_1 : X_2] \to [X_0^2 : X_0X_1 : X_0X_2 : X_1^2 : X_1X_2 : X_2^2]$$

è ben definita e C^∞.

Esercizio 12. Dimostrare che $\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ è una varietà, e che le mappe

$$\mathrm{GL}(k,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(k,\mathbb{R}), \quad g \to g^{-1}, \quad \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(k,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(k,\mathbb{R}), (g,h) \to gh$$

sono C^∞.

Esercizio 13. Sia $F(k,n) = \{x\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \text{ lineare} \mid \operatorname{rk} x = k\}$, e sia $\sim$ la relazione di equivalenza $x \sim y$ sse esiste $g \in \mathrm{GL}(k)$ tale che $x = y \circ g$. Definiamo la *grassmanniana* $G(k,n) = F(k,n)/\sim$.

(i) Dimostrare che $G(k,n)$ si può identificare con l'insieme dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k.

(ii) Dimostrare che $F(k,n)$ è una varietà, la proiezione $F(k,n) \to G(k,n)$ è aperta, e $G(k,n)$ è a base numerabile.

(iii) Se $J = (j_1, \dots, j_k)$ è un multiindice, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, definiamo

$$p_J\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad p_J(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}).$$

Dimostrare che per ogni x in $F(k,n)$ esiste qualche J tale che $p_J \circ x$ è invertibile, e per ogni tale J esiste un unico $y \sim x$ tale che $p_J \circ y = \mathrm{Id}$.

(iv) Siano $J_1, \dots, J_N$ tutti i multiindici come sopra, $N = \binom{n}{k}$. Dimostrare che la mappa $\phi\colon F(k,n) \to \mathbb{RP}^N$

$$\phi(x) = [\det p_{J_1} \circ x, \dots, \det p_{J_k} \circ x]$$

induce una mappa continua iniettiva $\tilde{\phi}\colon G(k,n) \to \mathbb{RP}^n$.

(v) Dimostrare che $G(k,n)$ è Hausdorff.

(vi) Sia $U_J \subset G(k,n)$ l'immagine dell'aperto $\{x \in F(k,n) \mid \det p_J \circ x \neq 0\}$. Sia $\overline{J}$ il complementare di J, e sia

$$\phi_J\colon U_J \to Hom(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^n), \quad \phi_J([x]) = p_{\overline{J}} \circ y,$$

dove $y \sim x$ è caratterizzato da $p_J \circ y = \mathrm{Id}$. Dimostrare che ϕ_J è un omeomorfismo con l'immagine

(vii) Dimostrare che $\{(U_J, \phi_J)\}$ costituisce un atlante.

5 Spazio tangente[5]

Prima di dare la definizione rigorosa di spazio tangente, facciamo qualche considerazione preliminare per motivarla.

Se si considera una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$, possiamo pensare al piano tangente a S in $p \in S$ come un piano affine passante per p; ad esempio per la sfera unitaria, il piano tangente a p è

$$\{p + v \mid \langle p, v\rangle = 0\}.$$

Volendo generalizzare questa costruzione a varietà astratte (cioè non immerse in qualche $\mathbb{R}^n$), non possiamo fare uso della struttura affine; possiamo tuttavia reinterpretare il piano tangente come dell'insieme delle coppie

$$\{(p; v) \mid \langle p, v\rangle = 0\};$$

in generale, lo spazio tangente di una varietà in un punto sarà uno spazio vettoriale di dimensione finita associato al punto.

Per costruire lo spazio tangente si usa la struttura C^∞: l'idea quindi è di dare una definizione che abbia senso per aperti di $\mathbb{R}^n$, ma che dipenda solo dalla loro struttura C^∞, in modo che sia valida in generale per le varietà. Per un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, lo spazio tangente a $p \in U$ risulterà essere lo spazio delle coppie

$$\{(p; v) \mid v \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n.$$

Ogni tale coppia (p, v) definisce una derivata direzionale

$$f \to \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tv),$$

che può essere vista come un operatore sulle funzioni C^∞ definite in un intorno di p in U. Poichè sulle varietà è definita la nozione di funzioni C^∞, questa nozione di "derivata direzionale" può essere estesa alle varietà, ed è quello che faremo per definire lo spazio tangente.

Veniamo alle definizioni precise.

Per costruzione, le funzioni C^∞ ristrette a un aperto sono ancora C^∞. Quindi a ogni aperto $U \subset M$ posso associare la $\mathbb{R}$-algebra $C^\infty(U)$, e se $V \subset U$ allora la restrizione definisce un omomorfismo $C^\infty(U) \to C^\infty(V)$. Lo spazio delle funzioni definite su un intorno aperto di $x \in M$ è

$$\{(U, f) \mid U \ni x \text{ aperto in } M, f \in C^\infty(U)\};$$

su questo spazio definiamo una relazione di equivalenza $\sim$ mediante

$$(U, f) \sim (V, g) \iff \exists W \subset U \cap V \text{ aperto contenente } x \text{ tale che } f|_W \equiv g|_W.$$

Il quoziente

$$C^\infty_x = \tilde{\mathcal{F}}_x = \{(U, f)\}/\sim$$

è detto *spazio dei germi* in x. Lo spazio dei germi ha una struttura indotta di $\mathbb{R}$-algebra, definita come segue (indicando per brevità la classe di equivalenza di (U, f) come $[U, f]$, invece di $[(U, f)]$):

$$[U, f]+[V, g] = [U\cap V, f|_{U\cap V}+g|_{U\cap V}], \quad [U, f]\cdot[V, g] = [U\cap V, f|_{U\cap V} g|_{U\cap V}], \quad \lambda[U, f] = [U, \lambda f].$$

La buona definizione segue dal fatto che se $[V, g] = [V', g']$, allora $g|_W = g'|_W$ per qualche $x \in W \subset V \cap V'$; quindi

$$[U, f]+[V', g'] = [U\cap V', f+g'] = [U\cap W, f+g'] = [U\cap W, f+g] = [U, f]+[V, g].$$

Lo stesso argomento si applica al prodotto. Infine, l'inclusione $\mathbb{R} \to \tilde{\mathcal{F}}_x$ data dalle funzioni costanti è un omomorfismo, quindi $\tilde{\mathcal{F}}_x$ ha la struttura di $\mathbb{R}$-algebra. D'ora in poi si scriverà f per indicare un elemento di $\tilde{\mathcal{F}}_x$ della forma $[U, f]$, sottintendendo cioè l'aperto su cui il rappresentante f è definita.

C'è un'omomorfismo naturale di $\mathbb{R}$-algebre

$$\tilde{\mathcal{F}}_x \to \mathbb{R}, \quad [U, f] \to f(x);$$

il suo nucleo è un ideale che verrà indicato come $\mathcal{F}_x$. Per costruzione, come spazi vettoriali,

$$\tilde{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x \oplus \mathbb{R}. \tag{1}$$

Definizione 11. Un *vettore tangente* a M in x è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare

$$v\colon \tilde{\mathcal{F}}_x \to \mathbb{R}$$

che soddisfa la regola di Leibniz

$$v(f \cdot g) = v(f)g(x) + f(x)v(g).$$

Lo *spazio tangente* a M in x è

$$T_xM = \{v \mid v \text{ vettore tangente a } x\}.$$

Si osservi che, con riferimento a (1), la regola di Leibniz implica $v(\mathbb{R}) = 0$ perchè $v(1 \cdot 1) = 2v(1)$; in altri termini, v è determinato dalla sua restrizione a $\mathcal{F}_x$. Si osservi inoltre che T_xM è uno spazio vettoriale: infatti è contenuto nello spazio vettoriale $\tilde{\mathcal{F}}_x^*$ e la regola di Leibniz definisce un sottospazio lineare.

Lemma 12. *C'è un isomorfismo di spazi vettoriali*

$$T_xM \cong \left(\frac{\mathcal{F}_x}{\mathcal{F}_x^2}\right)^*.$$

Dimostrazione. C'è un'applicazione lineare $T_xM \to \left(\frac{\mathcal{F}_x}{\mathcal{F}_x^2}\right)^*$ data da

$$v \to l_v, \quad l_v(f) = v(f).$$

Questa è ben definita perchè $l_v(f) = 0$ per $f \in \mathcal{F}_x^2$, a causa della regola di Leibniz. Inoltre è banalmente lineare.

È iniettiva perché come spazi vettoriali $\tilde{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x \oplus \mathbb{R}$, quindi se $l_v(f) = 0$ per ogni $f \in F_x$ allora $v = 0$.

Inoltre è suriettiva perchè dato $l \in \left(\frac{\mathcal{F}_x}{\mathcal{F}_x^2}\right)^*$, l'elemento $v \in \tilde{\mathcal{F}_x}^*$ definito da

$$v(f) = l(f - f(x))$$

è una derivazione: infatti

$$v(f + g) = l(f + g - (f + g)(x)) = l(f - f(x)) + l(g - g(x)) = v(f) + v(g)$$
$$v(\lambda f) = l(\lambda f - \lambda f(x)) = \lambda l(f - f(x)) = \lambda v(f),$$

e quindi è lineare; per verificare la regola di Leibniz calcoliamo

$$\begin{aligned} fg - f(x)g(x) &= (f - f(x))(g - g(x)) + f(x)g + fg(x) - 2f(x)g(x) \\ &= f(x)(g - g(x)) + (f - f(x))g(x) \mod \mathcal{F}_x^2; \end{aligned}$$

applicando l a entrambi i membri si ottiene

$$v(fg) = f(x)l(g - g(x)) + g(x)l(f - f(x)) = f(x)v(g) + g(x)v(f).$$

La suriettivita segue da $l_v = v$. □

Teorema 13. *Se M è una varietà, per ogni p in M vale*

$$\dim T_pM = \dim M.$$

Dimostrazione. Sia f in $\mathcal{F}_p$, e sia (U, ϕ) una carta centrata in p, cioè $p \in U$ e $\phi(p) = 0$. In particolare le coordinate $\phi_1, \dots, \phi_d$ sono elementi di $\mathcal{F}_p$. Possiamo supporre a meno di restringere U che f sia definita su U e $\phi(U)$ sia stellato; allora per la formula di Taylor si ha

$$f \circ \phi^{-1}(v) = D_v(f \circ \phi^{-1})(0) + \int_0^1 (1 - t)D_v^2(f \circ \phi^{-1})(tv)dt, \quad v \in \phi(U).$$

Poichè

$$D_v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_d \frac{\partial}{\partial x_d},$$

vale

$$f \circ \phi^{-1}(v) = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \phi^{-1})(0) + \sum_{i,j=1}^{d} v_i v_j R_{ij}(v),$$

dove R_{ij} è la funzione C^∞ data da

$$R_{ij}(v) = \int_0^1 (1 - t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ \phi^{-1})(tv)dt, \quad v \in \phi(U).$$

Componendo con ϕ, posto $v = \phi(q)$, troviamo che

$$f(q) = \sum_i \phi_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \phi^{-1})(0) + \sum_{i,j} \phi_i(q)\phi_j(q)R_{ij}(\phi(q)),$$

cioè in $\mathcal{F}_p$ vale

$$f = \sum_i \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \phi^{-1})(0) + \mathcal{F}_p^2;$$

in particolare i ϕ_i generano $\mathcal{F}_p/\mathcal{F}_p^2$.

Per vedere che sono indipendenti, supponiamo

$$\sum_i a_i \phi_i \in \mathcal{F}_p^2.$$

Abbiamo visto nella dimostrazione del lemma precedente che ogni derivazione annulla $\mathcal{F}_p^2$; in particolare la derivazione

$$D_j \in T_pM, \quad f \to \frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \phi^{-1})(0)$$

manda $a_i\phi_i$ in zero, e cioè

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_i a_i\phi_i \circ \phi^{-1})(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_i a_i x_i)(0) = a_j. \qquad \square$$

Se $f\colon M \to N$ è una mappa C^∞, e $v \in T_pM$, si definisce

$$df_p(v) \in T_{f(p)}N$$

mediante

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f).$$

Questo definisce una mappa lineare

$$df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N.$$

Vale banalmente la *chain rule*

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p.$$

Esercizio 14. Si dice che $f\colon M \to N$ è un diffeomorfismo se è C^∞ e ha un'inversa C^∞. Dimostrare che se f è un diffeomorfismo allora M e N hanno la stessa dimensione.

6 Il differenziale in coordinate

Conviene talvolta pensare a una carta $\phi\colon U \to \mathbb{R}^d$ come a un sistema di coordinate, cioè una d-upla di funzioni $x_i\colon U \to \mathbb{R}$, $\phi = (x_1, \ldots, x_d)$. Con questa notazione, il Teorema 13 si può riformulare in questo modo:

Teorema 14. *Se M è una varietà, p un punto di M, $x_1, \ldots, x_d$ sistema di coordinate in un intorno di p, allora gli elementi di $\mathcal{F}_p$*

$$\{x_i - x_i(p)\}_{i=1,\ldots,d} \tag{2}$$

determinano una base di $\mathcal{F}_p/\mathcal{F}_p^2$.

Dimostrazione. Come Teorema 13. $\square$

Ricordiamo che se V è uno spazio vettoriale con una base $e_1, \ldots, e_k$, si dice che gli elementi $\eta_1, \ldots, \eta_k$ di V^* costituiscono la base duale di V^* se

$$\eta_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

Esercizio 15. Verificare che data una base di uno spazio vettoriale di dimensione finita la base duale esiste ed è unica, ed è effettivamente una base.

Segue dal Teorema 14 che la scelta di una carta induce una base canonica su T_pM. Più precisamente, siano $z_1, \ldots, z_d$ le coordinate standard su $\mathbb{R}^d$. Se $\phi\colon U \to \mathbb{R}^d$ è una carta, $\phi = (x_1, \ldots, x_d)$, si definisce

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\colon \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}, \quad f \to \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial z_i}|_{\phi(p)}.$$

L'immagine di f viene indicata anche con la notazione $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_p$.

Corollario 15. *Per ogni $v \in T_pM$ vale*

$$v = \sum_i v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p.$$

In particolare i $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ costituiscono una base di T_pM duale alla base (2) *di $\mathcal{F}_p/\mathcal{F}_p^2$.*

Dimostrazione. Innanzitutto sono vettori tangenti perchè

$$f \to \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial z_i}|_{\phi(p)}$$

è lineare in f e soddisfa la regola di Leibniz.

Valutandoli,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(x_j - x_j(p)) = \frac{\partial}{\partial z_i}(x_j - x_j(p)) \circ \phi^{-1} = \frac{\partial}{\partial z_i}(z_j - x_j(p)) = \delta_{ij}.$$

da cui si vede che effettivamente è una base duale.

Infine, poiché è una base duale, la componente di v lungo $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ è ottenuta valutando v su $x_i - x_i(p)$, o equivalentemente su x_i. □

- Se prendiamo un'altra carta $\psi\colon U \to \mathbb{R}^d$, $\psi = (y_1, \ldots, y_d)$, segue dalla chain rule che

  $$\frac{\partial f}{\partial y_j}|_{\psi(p)} = \frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial z_j}|_p = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})}{\partial z_j}|_{\psi(p)}, = \sum_i \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial z_i}|_{\phi(p)} \frac{\partial x^i \circ \psi^{-1}}{\partial z_j}|_{\psi(p)}.$$

  cioè

  $$\frac{\partial}{\partial y_j}|_p = \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_j}|_p \frac{\partial}{\partial x_i}|_p.$$

- Presa una mappa qualunque $f\colon M \to N$, dove $y^1, \ldots y^n$ è un sistema di coordinate in un intorno di $f(p)$, vale

  $$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_j}|_p(y^j \circ f) \frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{3}$$

  Infatti

  $$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_i df_p(\frac{\partial}{\partial x_j})(y_i) \frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(p)} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_j}|_p(y_i \circ f) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Rimangono ancora da giustificare le notazioni $\frac{\partial}{\partial x_i}$ e df_p, nel senso che bisogna far vedere che nel caso di $\mathbb{R}^n$ coincidono con gli oggetti che ben conosciamo.

Consideriamo il caso particolare di $M = \mathbb{R}^d$; denotiamo con z_i le coordinate standard. Allora $T_p\mathbb{R}^d$ ha una base canonica $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ ottenuta usando la carta $\phi = \mathrm{Id}$, cioè

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p f = \frac{\partial}{\partial z_i}|_p(f \circ \phi^{-1}).$$

In questo caso $\phi = \mathrm{Id}$, quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p f = \frac{\partial}{\partial z_i}|_p$$

è l'usuale derivata parziale nella direzione z_i. È uso comune identificare $T_p\mathbb{R}^d$ con $\mathbb{R}^d$, cioè si identifica $\frac{\partial}{\partial x_i}$ con l'i-esimo vettore della base canonica e_i.

Esercizio 16. Data una varietà M e una carta $\phi = (x_1, \dots, x_d)$ centrata in p, dimostrare che

$$d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\right) = e_i.$$

In particolare se f ha valori in $\mathbb{R}$, possiamo vedere il differenziale come una mappa lineare

$$df_p \colon T_pM \to \mathbb{R}.$$

Proposizione 16. *Valgono le seguenti:*

(i) *Data $f \colon M \to \mathbb{R}$, allora $df_p(v) = v(f)$.*

(ii) *Se $f \colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^d$ aperto, allora $df_p(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(p)$.*

(iii) *Se $f \colon M \to \mathbb{R}^d$, $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \dots \\ f^d \end{pmatrix}$, allora il differenziale ha la forma*

$$df_p \colon T_pM \to \mathbb{R}^d, \quad df_p = \begin{pmatrix} df_p^1 \\ \dots \\ df_p^d \end{pmatrix}.$$

(iv) *Se $f \colon U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^d$ aperto, allora df_p è un'applicazione lineare*

$$df_p \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n,$$

e come matrice è rappresentato da

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right)_{ij}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare (i), denotiamo con t la coordinata standard su $\mathbb{R}$, e applichiamo il Corollario 15; otteniamo

$$df_p(v) = df_p(v)(t)\frac{\partial}{\partial t} = v(t \circ f)\frac{\partial}{\partial t} = v(f)\frac{\partial}{\partial t}.$$

(ii) discende da (i) e dal fatto che il vettore $\frac{\partial}{\partial x_i}$ agisce come la derivata parziale rispetto a x_i.

Per vedere (iii), siano y_i coordinate in $\mathbb{R}^n$, $q = f(p)$; le componenti di $df_p(v)$ rispetto alla base $\{\frac{\partial}{\partial y_i}\}$ sono date da

$$df_p(v)(y_i) = v(f^i) = df_p^i(v).$$

(iv) è ora ovvio. □

In particolare i dx_p^i sono elementi del duale T_p^*M di T_pM, per cui possiamo riformulare il Corollario 15 come segue:

Corollario 17. *I $(dx^i)_p$ sono una base di T_p^*M duale alla base $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Data $f\colon M \to \mathbb{R}$, si ha*

$$df_p = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i_p.$$

Dimostrazione. Calcoliamo

$$(dx_i)_p(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p) = \frac{\partial}{\partial x_j}|_p(x_i) = \delta_{ij}.$$

La seconda parte segue dalla proposizione. □

Teorema 18. *Sia M connessa. Una mappa $f\colon M \to N$ C^∞ è costante se e solo se $df_p = 0$ per ogni p.*

Dimostrazione. Data una carta $\phi = (x^1, \dots, x^d)$ su M e una carta $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ su N, sappiamo da (3) che la matrice associata a df ha la forma $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} y^j \circ f|_p\right)_{ij}$.

Se f è costante, anche $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è costante, e quindi queste derivate si annullano.

Viceversa, sia q un punto dell'immagine. Sappiamo che $f^{-1}(q)$ è chiuso e non vuoto; basta mostrare che è aperto. Supponiamo $f(p) = q$. Allora per opportuni sistemi di coordinate $x^1, \dots, x^d$, $y^1, \dots, y^n$, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} y^j \circ f|_p = 0.$$

Di conseguenza le funzioni $y^j \circ f \circ \phi^{-1}$ sono costanti su $\phi(U)$. Quindi $f \equiv q$ in un intorno di p. □

Possiamo dare un'altra caratterizzazione dello spazio tangente usando le curve. Se $\alpha\colon (a,b) \to M$ è una mappa C^∞, allora si pone

$$\alpha'(t) \stackrel{\text{def}}{=} d\alpha_t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Proposizione 19. *Lo spazio tangente in p può essere caratterizzato come*

$$T_pM = \{\alpha'(0) \mid \alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M, \alpha(0) = p\}.$$

Dimostrazione. L'inclusione $\supset$ è ovvia.

Dato $v \in T_pM$, sia ϕ una carta centrata in p, e sia $d\phi_p(v) = w \in \mathbb{R}^d$. Allora la curva

$$\alpha(t) = \phi^{-1}(tw)$$

è C^∞, soddisfa $\alpha(0) = p$, e

$$\alpha'(0) = d\phi_0^{-1}(w) = v.$$ □

Esercizio 17. Sia $i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'inclusione. Dimostrare che i è C^∞, e che

$$\operatorname{Im} di_p = p^\perp.$$

7 Fibrato tangente [5]

Sia M una varietà differenziabile. Si definisce il *fibrato tangente*

$$TM = \{(p; v) \mid p \in M, v \in T_pM\}.$$

È definita una proiezione naturale

$$\pi\colon TM \to M, \quad \pi(p; v) = p.$$

Osserviamo che se $U \subset M$ è un aperto, allora $\pi^{-1}(U) = TU$ come insiemi.

Su TM definiamo una struttura di varietà nel seguente modo: per ogni carta $\phi\colon U \to \mathbb{R}^d$ di M, definiamo

$$\tilde{\phi}\colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (p; v) \to (\phi(p), d\phi_p(v)).$$

Poichè ogni $d\phi_p$ è un isomorfismo, l'immagine è l'aperto $\phi(U) \times \mathbb{R}^d$.

Lemma 20. *Date due carte $\phi\colon U \to \mathbb{R}^d$, $\psi\colon U \to \mathbb{R}^d$ definite sullo stesso aperto U, la mappa*

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}\colon \phi(U) \times \mathbb{R}^d \to \psi(U) \times \mathbb{R}^d$$

è un diffeomorfismo.

Dimostrazione. Basta verificare che è C^∞; scambiando ϕ e ψ si trova poi la tesi.

Sia $\psi \circ \phi^{-1} = g$. Se $\phi = (x^1, \dots, x^d)$ e $\psi = (y^1, \dots, y^d)$, allora

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}(z, v) = (g(z), dg_z v).$$

La prima componente è C^∞ per definizione di atlante. La seconda ha la forma

$$\sum_{i,j} \frac{\partial g^i}{\partial z^j} v_j \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

Siccome g è C^∞, la tesi segue. □

Teorema 21. *Esiste un'unica struttura di varietà su TM per cui le mappe $\tilde{\phi}$ sono carte. Allora la proiezione $\pi\colon TM \to M$ è C^∞. Inoltre se $f\colon M \to N$ è una mappa C^∞, allora la mappa*

$$df\colon TM \to TN, \quad df(x; v) = (f(x); df_x(v))$$

è una mappa C^∞.

Dimostrazione. Definiamo dapprima la topologia. Se U è un aperto coordinato, definiamo su $\pi^{-1}(U)$ la topologia che rende $\tilde{\phi}$ un omeomorfismo. Questa topologia non dipende da ϕ ma solo da U, per il lemma. Adesso prendiamo la famiglia

$$\{W \subset TM \mid W \cap \pi^{-1}(U) \text{ è aperto per ogni aperto coordinato } U\}.$$

Questa famiglia definisce una topologia. In questa topologia π è continua: dato V aperto in M e una carta $\phi\colon U \to \mathbb{R}^d$,

$$\pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(U) = \tilde{\phi}^{-1}(\phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^d)$$

è aperto in $\pi^{-1}(U)$ per costruzione.

Inoltre in questa topologia i $\tilde{\phi}$ sono continue e aperte. Infatti se W è un aperto di TM contenuto in $\pi^{-1}(U)$, per costruzione è anche aperto in $\pi^{-1}(U)$, e quindi la sua immagine mediante ϕ è aperta. Viceversa se $W \subset \phi(U) \times \mathbb{R}^d$ un aperto. Allora $\tilde{\phi}^{-1}(W) \cap \pi^{-1}(V)$ è aperto in $\pi^{-1}(V)$ sse $\tilde{\psi}(\pi^{-1}(V) \cap W)$ è aperto in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, ma questo segue dal fatto che $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ è un omeomorfismo.

È a base numerabile perchè se prendo un numero numerabile di carte e tiro indietro una base numerabile di $\mathbb{R}^{2d}$ trovo una base. È di Hausdorff perchè presi due punti $(x; v)$, $(y; w)$ o x e y stanno entrambi in una carta U, e allora uso il fatto che $\tilde{\phi}$ è omeo locale, oppure no, e allora uso il fatto che i TU sono aperti. Le mappe $\tilde{\phi}$ definiscono un atlante per il lemma.

In una carta, $\pi \circ \tilde{\phi}^{-1} = \phi^{-1}$ che è C^∞.

Infine, se ϕ carta su M e ψ carta su N con $U \subset f^{-1}(V)$, vale

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} \circ df \circ \tilde{\phi}^{-1}(z; v) = \tilde{\psi} \circ df(\phi^{-1}(z), d\phi_z^{-1}(v)) = \\ \tilde{\psi}(f(\phi^{-1}(z)), d(f \circ \phi^{-1})_z(v)) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z), d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_z(v)\end{aligned}$$

questa è una mappa C^∞, come nella dimostrazione del lemma. $\square$

Esercizio 18. Sia $M = \mathbb{R}^2$ con la struttura differenziabile standard. Dimostrare che $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(w_1, w_2) = (w_1 + w_2, w_2)$ è una carta. Calcolare $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Esercizio 19. Siano M^m, N^n varietà. Per $x \in M$ e y in N, sia

$$i_1^y\colon M \to M \times N, \quad i_1^y(x) = (x, y), \quad i_2^x\colon N \to M \times N, \quad i_2^x(y) = (x, y),$$

e p_1, p_2 le proiezioni. Dimostrare che

$$T_xM \times T_yN \to T_{x,y}M \times N, \quad (v, w) \to di_1^y(x; v) + di_2^x(y; w)$$

è un isomorfismo con inversa

$$((dp_1)_x, (dp_2)_y)\colon T_{x,y}M \times N \to T_xM \times T_yN.$$

Nota bene. Il risultato di questo esercizio ci permette di identificare $T_{x,y}M \times N$ con il prodotto $T_xM \times T_yN$. Un elemento di questo prodotto verrà scritto

$$(x, y; v, w).$$

Esercizio 20. Sia $f = (f_1, f_2)\colon M \to N \times Z$ una mappa C^∞. Dimostrare che mediante l'identificazione $T_{y,z}N \times Z = T_yN \times T_zZ$, il differenziale si scrive come

$$df = (df_1, df_2).$$

Esercizio 21. Siano M, N varietà. Dette $p_1\colon M \times N \to M$ e $p_2\colon M \times N \to N$ le proiezioni, dimostrare che $(dp_1, dp_2)\colon T(M \times N) \to TM \times TN$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 22. Sia $g\colon M \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞. Dimostrare che l'applicazione

$$TM \to TM, \quad (x; v) \to (x; g(x)v)$$

è C^∞.

Esercizio 23. Si dimostri che una rotazione di $\mathbb{R}^2$ definisce una mappa C^∞ da S^1 in sè.

Esercizio 24. Si dimostri che la mappa

$$f\colon (a, a + 2\pi) \to S^1, \quad \theta \to e^{i\theta}$$

definisce una parametrizzazione.

8 Teorema della funzione inversa [4, 5]

Alcuni degli esempi di varietà che abbiamo visto finora appaiono in modo naturale come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (p.es. la sfera). É naturale chiedersi sotto quali condizioni un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ abbia una struttura indotta di varietà. Lo strumento che permetterà di determinare queste condizioni è il teorema della funzione inversa, che è l'argomento di questa sezione.

Lemma 22 (Lemma delle contrazioni)**.** *Sia $f\colon X \to X$ una contrazione di uno spazio metrico completo X, nel senso che esiste $0 < K < 1$ tale che $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$. Allora f ha un unico punto fisso, che è limite di ogni successione $f^n(x)$.*

Dimostrazione. Fissato x, dimostriamo che $f^n(x)$ è di Cauchy. Sia $\lambda = d(x, f(x))$. Allora
$$d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \leq K^k\lambda.$$
Per la disuguaglianza triangolare,
$$d(x, f^k(x)) \leq \lambda(1 + K + \ldots + K^{k-1}) = \lambda\frac{1 - K^k}{1 - K} \leq \frac{\lambda}{1 - K}.$$
In particolare
$$d(f^h(x), f^{k+h}(x)) \leq K^h\frac{\lambda}{1 - K},$$
cioè $f^n(x)$ è di Cauchy. Quindi ha un limite. Per continuità è un punto fisso. Inoltre il punto fisso è unico perchè f è una contrazione. □

Teorema 23 (della funzione inversa, [4])**.** *Sia $f\colon U \to \mathbb{R}^d$ mappa C^∞, $U \subset \mathbb{R}^d$ aperto, tale che df_p è invertibile per qualche $p \in U$. Allora esiste un intorno aperto V di p tale che $f(V)$ è aperto e $f|_V\colon V \to f(V)$ è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. A meno di traslazione possiamo supporre $p = 0 = f(p)$. Inoltre a meno di sostituire f con $df_0^{-1} \circ f$, possiamo supporre $df_0 = \mathrm{Id}$.

Sia adesso $g(x) = f(x) - x$. Per costruzione $dg_0 = 0$. Quindi per continuità vale che
$$\max_{v \in S^{d-1}} \|dg_x(v)\| = \|dg_x\| < \frac{1}{2}$$
per x sufficientemente piccolo, diciamo $\|x\| < 2r$. Per il teorema del valor medio segue che
$$\|g(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|, \quad \|x\| < 2r,$$
e in particolare
$$\|g(x)\| \leq r/2, \quad \|x\| \leq r.$$

Per ogni $y \in \overline{B(0, r/2)}$, vogliamo dimostrare che esiste un unico $x \in \overline{B(0, r)}$ con $f(x) = y$. Procediamo definendo
$$g_y\colon \overline{B(0, r)} \to \overline{B(0, r)}, \quad g_y(x) = y - g(x).$$
Effettivamente g_y è ben definita perchè
$$\|g_y(x)\| \leq \|g(x)\| + \|y\| \leq r.$$

Inoltre
$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$
di nuovo per il teorema del valor medio.

Quindi g_y è una contrazione dello spazio metrico completo $\overline{B(0,r)}$. Quindi ha un unico punto fisso x,
$$g_y(x) = x \implies f(x) = y.$$
Se poniamo $x = \phi(y)$, otteniamo una mappa
$$\phi\colon \overline{B(0,r/2)} \to \overline{B(0,r)}.$$
Questa è continua perchè
$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| = \|f(x_1) - g(x_1) - f(x_2) + g(x_2)\| &\leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \|g(x_1) - g(x_2)\| \\ &\leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.\end{aligned}$$
Poniamo $V = f^{-1}(B(0,r/2))$; adesso $f\colon V \to f(V) = B(0,r/2)$ è un omeomorfismo con inversa ϕ.

Per vedere che l'inversa è differenziabile, cerchiamo di dimostrare che $d\phi_y$ esiste e coincide con $df^{-1}_{\phi(x)}$. Quindi se $f(x_i) = y_i \in B(0,r/2)$,
$$\left\|\phi(y_1) - \phi(y_2) - df^{-1}_{x_2}(y_1 - y_2)\right\| \leq \left\|df^{-1}_{x_2}\right\| \|df_{x_2}(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)\|$$
d'altra parte f è differenziabile e
$$\|f(x_1) - f(x_2) - df_{x_2}(x_1 - x_2)\| = o(x_1 - x_2) = o(y_1 - y_2).$$
Adesso la mappa
$$y \to d\phi_y = df^{-1}_{\phi(y)}$$
è la composizione
$$\sigma \circ Jf \circ \phi,$$
dove $Jf(x) = df_x$ e σ è l'inversione in $\mathrm{GL}(n,R)$; sono tutte mappe continue, quindi $d\phi_y$ dipende da y in modo continuo, cioè ϕ è C^1. Per induzione, usando il fatto che Jf e σ sono C^∞, si trova che ϕ è C^∞. □

L'analogo per le varietà è il seguente:

Corollario 24. *Sia $f\colon M \to N$ una mappa C^∞; sia $p \in M$ un punto per cui $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ è un isomorfismo. Allora esiste un intorno $U \ni p$ aperto tale che $f(U)$ è aperto e $f|_U\colon U \to f(U)$ è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Per il Teorema 13 $\dim M = \dim N$. Sia ϕ carta centrata in p e ψ carta centrata in $f(p)$. Allora
$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}$$
soddisfa le ipotesi del teorema della funzione inversa. □

Se $y_1, \dots, y_k$: sono funzioni a valori in $\mathbb{R}$ definite in un intorno di p, diciamo che sono indipendenti in p se $(dy_1)_p, \dots, (dy_k)_p$ sono elementi linearmente indipendenti di $T_p^* M$.

Esercizio 25. Sia $\iota\colon M \to N$ una mappa C^∞ con la proprietà che per ogni funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$ esiste $\tilde{f}\colon N \to \mathbb{R}$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"] & N \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Dimostrare che ι è un embedding con immagine chiusa in M (vale cioè l'inverso della Proposizione 30).

Corollario 25. *Sia p un punto di una varietà M di dimensione d.*

(i) *Siano $y_1, \dots, y_d$ funzioni indipendenti in p di M. Allora formano un sistema di coordinate in un intorno di p.*

(ii) *Siano $y_1, \dots, y_k$ funzioni indipendenti in p. Allora $y_1, \dots, y_k$ può essere completato a un sistema di coordinate in un intorno di p della forma $y_1, \dots, y_d$.*

(iii) *Siano $y_1, \dots, y_k$ funzioni in un intorno di p con la proprietà che $(dy_i)_p$ generano $T_p^* M$. Allora un sottoinsieme degli y_i costituisce un sistema di coordinate in un intorno di p.*

Dimostrazione. (i) Se le y_i sono definite su U, abbiamo

$$f\colon U \to \mathbb{R}^d, \quad f = (y_1, \dots, y_d).$$

Per costruzione

$$df_p = \begin{pmatrix} dy_1 \\ \dots \\ dy_d \end{pmatrix}$$

dove le righe sono linearmente indipendenti, quindi df_p è invertibile.

(ii) Siano $(x_1, \dots, x_d)$ coordinate intorno a p. Adesso

$$dy_1, \dots, dy_k, dx_1, \dots, dx_d$$

generano $T_p^* M$, quindi prendiamo $dx_{i_1}, \dots, dx_{i_{n-d}}$ di modo che

$$dy_1, \dots, dy_k, dx_{i_1}, \dots, dx_{i_{n-d}}$$

sia una base. Poi applichiamo il punto precedente.

(iii) Si estrae un sottoinsieme di d funzioni indipendenti in p e si applica il punto (i).

□

Corollario 26. *Sia $f\colon M \to N$, $p \in M$, $x_1, \dots, x_d$ sistema di coordinate intorno a $f(p)$.*

- *Se df_p iniettivo, una sottofamiglia di $\{x_1 \circ f, \dots, x_d \circ f\}$ forma un sistema di coordinate.*

- *Se df_p è suriettivo, si può completare $\{x_1 \circ f, \dots, x_d \circ f\}$ a un sistema di coordinate.*

Dimostrazione. Se df_p è suriettivo, allora

$$dx_1 \circ df_p, \dots, dx_d \circ df_p$$

sono linearmente indipendenti: altrimenti, infatti, avremmo

$$\lambda_1 dx_1 \circ df_p + \dots + \lambda_d dx_d \circ df_p = 0$$

da cui

$$(\lambda_1 dx_1 + \dots + \lambda_d dx_d)\,|_{\operatorname{Im} df_p} = 0;$$

poiché $\operatorname{Im} df_p = T_{f(p)}N$, i λ_i si annullano.

Se df_p è iniettivo, allora

$$dx_1 \circ df_p, \dots, dx_d \circ df_p$$

generano T_p^*M. Infatti se generassero uno spazio più piccolo, si annullerebbero tutti su un vettore v. Allora i dx_i si annullerebbero tutti su $df_p(v)$, quindi $v = 0$.

Adesso si applica il corollario precedente. □

9 Sottovarietà [5]

Se $f\colon M \to N$ è una mappa C^∞ tra varietà, diciamo che

- f è un'*immersione* se df_p è iniettivo per ogni p;
- f è una *sommersione* se df_p è suriettivo per ogni p;
- f è un *embedding* se df_p è iniettivo e inoltre f è un omeomorfismo con l'immagine;
- la coppia (M, f) è una *sottovarietà immersa* di N se f è un'immersione iniettiva;
- la coppia (M, f) è una *sottovarietà regolare* di N se f è un embedding.

Esercizio 26. Sia $\alpha\colon (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da $\alpha(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$. Dimostrare che α é una immersione iniettiva, ma non un embedding.

Esercizio 27. Sia

$$f\colon \mathbb{R} \to S^1 \times S^1, \quad f(t) = (e^{it}, e^{\lambda i t}),$$

dove λ è irrazionale. Dimostrare che f è un'immersione iniettiva ma non un embedding.

Supponiamo che (P, i) sia una sottovarietà immersa di N. Data una mappa C^∞, $f\colon M \to N$, con $f(M) \subset i(P)$, esiste un'unica mappa $\tilde{f}$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & N \\ & P \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

In generale non è detto che $\tilde{f}$ sia C^∞.

Esercizio 28. Sia $(\mathbb{R}, \alpha)$ la sottovarietà immersa di $\mathbb{R}^2$ dell'esercizio 26. Costruire una mappa C^∞, $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$, con immagine contenuta in $\alpha(\mathbb{R})$ tale che la mappa indotta $\tilde{f}\colon S^1 \to \mathbb{R}$ ha immagine $[0, +\infty)$. Mostrare che $\tilde{f}$ non è continua e tantomeno C^∞.

D'altra parte, la continuità di $\tilde{f}$ è l'unica ostruzione:

Teorema 27. *Nelle ipotesi di sopra, se $\tilde{f}$ è continua è anche C^∞. Inoltre se i è un embedding, allora $\tilde{f}$ è continua.*

Dimostrazione. Sia $p \in P$, e sia $\phi\colon V \to \mathbb{R}^d$ un sistema di coordinate centrato in $i(p)$. Allora un sottoinsieme delle coordinate $(x_1 \circ i, \dots, x_d \circ i)$ definiscono un sistema di coordinate in un intorno di p, cioè per qualche $\pi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ lineare, $\gamma = \pi \circ \phi \circ i$ è una carta in un intorno U di p in P. Se $\tilde{f}$ è continua, allora $\tilde{f}^{-1}(U)$ è aperto, e vediamo che

$$\gamma \circ \tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(U)} = \pi \circ \phi \circ i \circ \tilde{f} = \pi \circ \phi \circ f\colon \tilde{f}^{-1}(U) \to \mathbb{R}^k$$

è una mappa C^∞. Quindi f è C^∞.

Se i è un embedding, allora $\tilde{f} = i^{-1} \circ f$ è composizione di mappe continue. □

Il motivo per cui pensiamo a una sottovarietà come una coppia (P, ϕ) è che anche nel caso in cui P è un sottoinsieme e ϕ l'inclusione, la topologia di P non è necessariamente la topologia indotta (se la sottovarietà non è regolare).

Corollario 28. *Sia M varietà, $P \subset M$ sottoinsieme. Per ogni topologia su P, esiste al piú una struttura differenziabile compatibile su P tale che l'inclusione $i\colon P \to M$ è un'immersione.*

Dimostrazione. Denotiamo con P', P'' lo spazio topologico P con due strutture differenziabili compatibili che rendono i immersione. Applichiamo il teorema a i, e troviamo che $\tilde{i}\colon P' \to P''$ è continua perchè è l'identità e la topologia è la stessa. Dunque l'identità è C^∞; vale nei due sensi, quindi è un diffeomorfismo. Questo vuol dire che le carte di P' sono anche carte di P'', cioè le due strutture differenziabili coincidono. □

Osservazione. Se $f\colon M \to N$ embedding, allora $f(M)$ con la topologia indotta ha un'unica struttura di sottovarietà regolare rispetto all'inclusione; per questa struttura f è un diffeomorfismo. Infatti, la condizione che $f\colon M \to f(M)$ sia diffeomorfismo definisce una struttura C^∞ su $f(M)$. Questa è compatibile con la topologia di sottospazio perchè $f\colon M \to N$ embedding. Per il corollario, $f(M)$ non ha altre strutture C^∞ compatibili con la topologia sottospazio.

D'ora in poi, una sottovarietà regolare è un sottoinsieme $M \subset N$ tale che l'inclusione è un embedding.

In generale, se l'inclusione $i\colon M \to N$ è un'immersione, allora il tangente T_pM della sottovarietà verrà identificato con la sua immagine $di_p(T_pM) \subset T_pN$.

La forma locale delle immersioni è descritta dal seguente lemma.

Lemma 29. *Sia $f\colon M^d \to N^n$ immersione, $p \in M$. Allora esistono una carta $\phi\colon V \to \mathbb{R}^n$ centrata in $f(p)$ e un intorno U di p tale che $f|_U$ è iniettiva e*

$$\phi(f(U)) = \phi(V) \cap \mathbb{R}^d,$$

dove $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale. Se f è un embedding inoltre si puó supporre $f(U) = f(M) \cap V$.

Dimostrazione. Sia ψ carta centrata in $f(p)$, e sia $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ la proiezione sulle prime coordinate. Per il Corollario 26, possiamo riordinare le coordinate definite da ψ in modo che $\tilde{\psi} = \pi \circ \psi \circ f$ definisca una carta in un intorno W di p; in particolare f è iniettiva in W.

$$\begin{tikzcd}
W \subset M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tilde{\psi}"] & f(W) \subset N \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^d & \mathbb{R}^n \arrow[l, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

Adesso definiamo

$$x_i\colon (\pi \circ \psi)^{-1}(\tilde{\psi}(W)) \to \mathbb{R},$$
$$x_i = \begin{cases} \psi_i & i = 1, \dots, d \\ \psi_i - \psi_i \circ f \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ \pi \circ \psi & i = d+1, \dots, n \end{cases}$$

Allora
$$dx_i = \begin{cases} d\psi_i & i = 1, \dots, d \\ d\psi_i - \sum_{j=1}^d a_{ij} d\psi_j & i = d+1, \dots, n \end{cases}$$
sono linearmente indipendenti in p, quindi per il Corollario 25 in un intorno V di $f(p)$ definiscono un sistema di coordinate. Sia $U = W \cap f^{-1}(V)$. Il sistema di coordinate $x_1, \dots, x_d$ soddisfa la tesi se

$$\{q \in V \mid x_{d+1}(q) = \ldots = x_n(q) = 0\} = f(U). \tag{4}$$

L'inclusione $\supset$ è ovvia. Viceversa se q è nell'insieme di sinistra in (4), allora

$$z = \tilde{\psi}^{-1}(\pi(\psi(q))) \in W,$$

e $\pi \circ \psi \circ f(z) = \pi \circ \psi(q)$ per definizione, cioè $\psi_i(f(z)) = \psi_i(q)$ per $i \leq d$. Inoltre la condizione $x_i(q) = 0$, $i > d$ implica

$$\psi_i(q) = \psi_i \circ f \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ \pi \circ \psi(f(z)) = \psi_i(f(z)),$$

quindi q e $f(z)$ hanno le stesse coordinate rispetto alla carta ψ e coincidono. Questo dimostra (4).

Se f embedding, allora $f(U)$ è aperto in $f(M)$, cioè esiste W aperto in N tale che $f(U) = f(M) \cap W$. Sostituiamo V con $V \cap W$, e abbiamo finito. $\square$

Dal lemma segue il seguente:

Proposizione 30. *Sia $M \subset N$ sottovarietà regolare chiusa. Allora la mappa di restrizione $C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ è suriettiva.*

Dimostrazione. Sia $h\colon M \to \mathbb{R}$ C^∞; dobbiamo estenderla a $\tilde{h}\colon N \to R$.

Per il lemma 29, preso $p \in M$, possiamo prendere una carta di N, $\phi\colon V_p \to \mathbb{R}^n$ centrata in p tale che $M \cap V_p = \phi^{-1}(\mathbb{R}^d)$. Adesso costruiamo $h_p\colon V_p \to \mathbb{R}$ che estende $h|_{M \cap V_p}$, ponendo

$$h_p = h \circ \phi^{-1} \circ \pi \circ \phi,$$

dove $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ è la proiezione; questa risulta essere C^∞ perchè $h \circ \phi^{-1}|_{\phi(V_p)\cap\mathbb{R}^d}$ è C^∞. Se $p \notin M$, poniamo $V_p = N \setminus M$, $h_p = 0$. Adesso sia ϕ_k una partizione dell'unità subordinata a $\{V_p\}$. Quindi ϕ_k ha supporto contenuto in V_{p_k}. La somma

$$\tilde{h} = \sum_k \phi_k h_{p_k}$$

è una funzione C^∞; inoltre per ogni $p \in M$,

$$\tilde{h}(p) = \sum_{\phi_k(p)\neq 0} \phi_k(p) h_{p_k}(p) = h(p)$$

poichè su $V_{p_k} \cap M$ h_{p_k} coincide con h. $\square$

Definizione 31. Se $f\colon M \to N$ è C^∞, si dice che p è un punto critico se df_p non è suriettivo; si dice regolare altrimenti. Si dice che $q \in N$ è un valore critico se esiste un punto critico p, $f(p) = q$. Si dice che q è un valore regolare se non è critico, cioè ogni $p \in f^{-1}(q)$ è un punto regolare.

Teorema 32. *Se $f\colon M^d \to N^n$ è C^∞ e $q \in N$ è un valore regolare, $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, allora $f^{-1}(q)$ è una sottovarietà regolare di dimensione $d - n$ e*

$$T_p(f^{-1}(q)) = \ker df_p.$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che $f^{-1}(q)$ ha una struttura di varietà compatibile con la topologia di sottospazio. Intanto, è banalmente di Hausdorff e a base numerabile.

Per costruire l'atlante, sia $x_1, \dots, x_n$ un sistema di coordinate centrato in $q = f(p)$. Per il Corollario 26, abbiamo un sistema di coordinate $y_1, \dots, y_d$, definito in U e centrato in p, tale che

$$x_i \circ f = y_i, i = 1, \dots, n.$$

Allora $f^{-1}(q) \cap U = \{y_1 = 0, \dots, y_n = 0\}$. Quindi se $\phi\colon U \to \mathbb{R}^d$ è la carta,

$$\tilde{\phi} = \pi \circ \phi\colon f^{-1}(q) \cap U \to \mathbb{R}^{d-n}$$

è un omeomorfismo con l'immagine, che è aperta.

Per verificare che le mappe $\tilde{\phi}$ così costruite costituiscono un atlante, osserviamo che per costruzione l'inversa è la restrizione di ϕ^{-1}, quindi i cambiamenti di carta hanno la forma

$$\pi \circ \phi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U)\cap\mathbb{R}^d}.$$

Quindi è definito un atlante su $f^{-1}(q)$. L'inclusione $i\colon f^{-1}(q) \to M$ è un'immersione perchè nella carta ϕ corrisponde all'inclusione di $\mathbb{R}^{d-n}$ in $\mathbb{R}^d$, cioè

$$\phi \circ i \circ (\pi \circ \phi)^{-1}(z) = (0, z).$$

Infine, $f \circ i$ è costante, e quindi il suo differenziale è zero, cioè

$$0 = d(f \circ i)_p = df_p \circ di_p;$$

quindi $di_p(T_p(f^{-1}(q))) \subset \ker df_p$, e per ragioni dimensionali vale l'uguaglianza. $\square$

Se U è un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ è una mappa C^∞, il grafico

$$\Gamma_g = \{(y, g(y)) \mid y \in U\}$$

è una sottovarietà regolare di $\mathbb{R}^{d+n}$, con una carta data dalla proiezione $\Gamma_g \to U$. Localmente vale il viceversa:

Corollario 33 (Teorema della funzione implicita)**.** *Sia $M^d \subset \mathbb{R}^{n+d}$ una sottovarietà regolare. Allora M è localmente un grafico, cioè per ogni $p \in M$, a meno di riordinare le coordinate, esiste un intorno $p \in U \times V \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ e una funzione C^∞ $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ tale che*

$$M \cap (U \times V) = \{(y, g(y)) \mid y \in U\}.$$

Dimostrazione. Siano $x_1, \dots, x_{n+d}$ coordinate standard su $\mathbb{R}^{n+d}$; sappiamo che l'inclusione ι ha differenziale iniettivo, quindi per il Corollario 26 possiamo supporre a meno di riordinare le coordinate che $x_1 \circ \iota, \dots, x_d \circ \iota$ siano coordinate in un intorno di M. Poichè M ha la topologia di sottospazio, possiamo supporre che l'intorno abbia la forma $U \times V$, cosí che la carta individuata dalle coordinate sia la proiezione

$$\pi\colon M \cap (U \times V) \to U.$$

Per costruzione, l'inversa

$$\iota \circ \pi^{-1}\colon U \to U \times V$$

ha la forma

$$y \to (y, g(y))$$

con g funzione C^∞. Poichè π è biunivoca, la tesi segue. □

Esercizio 29. Sia $f\colon M \to N$ un'immersione iniettiva propria, cioè la preimmagine di ogni compatto è un compatto. Dimostrare che f è un embedding e $f(M)$ è chiusa.

Esercizio 30. Dimostrare che S^d con la struttura di varietà definita dalle proiezioni stereografiche è una sottovarietà regolare di $\mathbb{R}^{d+1}$.

Esercizio 31. Determinare valori critici e valori regolari di

$$f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2.$$

Dimostrare che $f^{-1}(1)$ ha una struttura C^∞ indotta che coincide con la struttura standard sulla sfera.

Esercizio 32. Dimostrare che non esiste un'immersione di S^n in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 33. Dimostrare che se W è uno spazio vettoriale e $V \subset W$ è un sottospazio, allora V è una sottovarietà regolare di W.

Esercizio 34. Dimostrare che il gruppo ortogonale $O(n)$ è una sottovarietà regolare di $M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ di dimensione $n(n-1)/2$.

Esercizio 35. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞,

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2.$$

Dimostrare che 1 è un valore regolare di f. Sia $M = f^{-1}(1)$. Sia $g = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Trovare i punti critici di $g|_M\colon M \to \mathbb{R}$.

Esercizio 36. Se M^d è una sottovarietà immersa (regolare) di N^n allora TM è una sottovarietà immersa (regolare) di TN.

Esercizio 37. Sia $v \in T_pM$ diverso da zero. Costruire una mappa C^∞ $f\colon M \to \mathbb{R}$ tale che $df_p(v) \neq 0$.

Esercizio 38. Sia $\iota\colon M \to N$ una mappa C^∞ con la proprietà che per ogni funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$ esiste $\tilde{f}\colon N \to \mathbb{R}$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & N \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Dimostrare che ι è un embedding con immagine chiusa in M (vale cioè l'inverso della Proposizione 30).

10 Campi di vettori [5, 2]

Un campo di vettori su M è una mappa C^∞

$$X\colon M \to TM$$

tale che $\pi \circ X = \mathrm{Id}$; in particolare a ogni $p \in M$ si associa un vettore $X_p \in T_pM$. Un campo di vettori locale su M è un campo di vettori su un aperto di M.

Se X è un campo di vettori, $U \subset M$ è un aperto, $f \in C^\infty(U)$, allora è definita una funzione

$$X(f) = Xf\colon U \to \mathbb{R}, \quad Xf(p) = X_pf.$$

Si dimostra che $f \to Xf$ è una mappa di $C^\infty(U)$ in sè; più precisamente, vale:

Proposizione 34. *Sia $X\colon M \to TM$ una mappa tale che $\pi \circ X = \mathrm{Id}$. Sono equivalenti:*

(i) *X è C^∞;*

(ii) *per ogni sistema di coordinate $(x_1, \dots, x_d)$, $X = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, dove a_i sono funzioni C^∞;*

(iii) *per ogni aperto $U \subset M$ e funzione $f\colon U \to \mathbb{R}$ C^∞, Xf è C^∞.*

Dimostrazione. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Dato un sistema di coordinate $(x_1, \dots, x_d)$, le funzioni $dx_i\colon TM \to \mathbb{R}$ sono C^∞. Quindi $a_i = dx_i \circ X$ sono mappe C^∞ dall'aperto coordinato in $\mathbb{R}$, che corrispondono alle funzioni dell'enunciato perché per il Corollario 17

$$X_p = \sum dx_i(X_p)\frac{\partial}{\partial x_i} = a_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Basta dimostrare che Xf è C^∞ localmente, quindi restringiamo U a un aperto coordinato con sistema di coordinate $(x_1, \dots, x_d)$, e vediamo che

$$Xf(p) = \sum a_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}|_p f$$

dipende in modo C^∞ da p.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Siano $x_1, \dots, x_d$ coordinate locali $U \to \mathbb{R}$. Allora abbiamo una carta

$$\tilde{\phi}\colon TU \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (p; v) \to (x_1(p), \dots, x_d(p); dx_1(v), \dots dx_d(v)).$$

Quindi

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(X(p)) = (x_1(X(p)), \dots, x_d((X(p)); dx_1(X_p), \dots, dx_d(X_p))\\ = (x_1(p), \dots, x_d(p); X_p(x_1), \dots, X_p(x_d)),\end{aligned}$$

le cui componenti sono C^∞. $\square$

Dati due campi di vettori X, Y su M, si definisce il *prodotto di Lie* $[X, Y]$ come il campo di vettori che soddisfa

$$[X, Y]_p\colon \tilde{\mathcal{F}}_p \to \mathbb{R}, \quad f \to (XYf - YXf)(p). \tag{5}$$

Ad esempio se X, Y sono campi cordinati, $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$, allora $[X, Y] = 0$.

Lo spazio dei campi di vettori si indica con $\mathfrak{X}(M)$.

Proposizione 35. *Il prodotto di Lie $[X, Y]$ definisce un campo di vettori su M, e $(\mathfrak{X}(M), [,])$ è un'algebra di Lie, cioè $\mathfrak{X}(M)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e:*

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$*;*

(ii) *il prodotto $(X, Y) \to [X, Y]$ è bilineare su $\mathbb{R}$;*

(iii) *vale l'identità di Jacobi*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Dimostrazione. Per la prima parte, dobbiamo verificare che per ogni $p \in M$ la mappa $\mathbb{R}$-lineare (5) è una derivazione. Questo è vero perché

$$\begin{aligned}&[X, Y](fg) = XY(fg) - YX(fg) = X(g(Yf) + f(Yg)) - Y(gXf + fXg)\\ &= (Xg)(Yf) + g(XYf) + (Xf)(Yg) + fXYg - (Yg)Xf - gYXf - (Yf)(Xg) - fYXg\\ &= g(XYf) + fXYg - gYXf - fYXg\\ &= g[X, Y]f + f[X, Y]g\end{aligned}$$

Quindi esiste un'unica mappa $[X, Y]\colon M \to TM$ che soddisfa (5). Questo è effettivamente un campo di vettori per la proposizione precedente.

I primi due assiomi di algebra di Lie valgono banalmente. Per il terzo, scriviamo

$$\begin{aligned}&[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] =\\ &[XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] + [ZX - XZ, Y]\\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX\\ &- XYZ + XZY + ZXY - XZY - YZX + YXZ = 0.\end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 39. Su $\mathbb{R}^2$, calcolare $[x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}]$.

Osservazione. Il prodotto di Lie è lineare su $\mathbb{R}$ ma *non* su $C^\infty(M)$. Infatti, se $f \in C^\infty(M)$,

$$[fX, Y] = fXY - Y(fX) = fXY - (Yf)X - fYX = f[X,Y] - (Yf)X.$$

In generale una mappa C^∞ $f \colon M \to N$ non induce una mappa di campi di vettori. Tuttavia si dice che X su M e Y su N sono f-correlati se il diagramma

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[d, "f"] & TM \arrow[d, "df"] \\ N \arrow[r, "Y"] & TN \end{tikzcd}$$

commuta; equivalentemente, se per ogni $x \in M$ vale $df_x(X_x) = Y_{f(x)}$.

Esercizio 40. Se X, X' sono f-correlati a Y,Y' allora $[X, X']$ è f-correlato a $[Y, Y']$.

Una *orbita* o *curva integrale* di X è una mappa C^∞ $\alpha \colon (a, b) \to M$ tale che

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}.$$

Ad esempio su $\mathbb{R}^n$ un campo di vettori può essere visto come una mappa C^∞, $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(p) = X_p$. Allora le orbite di X sono le soluzioni di

$$\alpha'(t) = f(\alpha(t)).$$

L'esistenza delle orbite segue da un noto teorema di analisi:

Teorema 36 (Picard [3])**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ è localmente di Lipschitz, allora per ogni $p \in \Omega$ esistono $\omega_-(p) < 0 < \omega_+(p)$ e $\alpha \colon (\omega_-, \omega_+) \to \Omega$ per cui*

$$\alpha'(t) = f(\alpha(t)), \quad \alpha(0) = p. \tag{6}$$

Ogni altra soluzione di (6) *si ottiene da α per restrizione.*

Inotre le funzioni $p \to \omega_\pm(p)$ sono semicontinue, per cui

$$\{(t,p) \mid \omega_-(p) < t < \omega_+(p)\} \subset \mathbb{R} \times \Omega$$

è un intorno di $\{0\} \times \Omega$.

Teorema 37 (Peano [3])**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ è C^∞, allora esiste un intorno aperto $W \subset \mathbb{R} \times \Omega$ di $\{0\} \times \Omega$ e una mappa C^∞*

$$\phi \colon W \to \Omega$$

tale che per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ la mappa $t \to \phi(t,p)$ è una restrizione della soluzione di (6).

Lemma 38. *Se X è un campo di vettori su una varietà M, per ogni $p \in M$ esiste un'unica orbita massimale di X con $\alpha(0) = p$.*

Dimostrazione. L'esistenza segue dal teorema di Picard mettendosi in una carta centrata in p.

Siano α, β due orbite definite sullo stesso intervallo (a, b). Allora $\{t \mid \alpha = \beta\}$ è chiuso. É anche aperto per l'unicità del teorema di Picard. Quindi α e β coincidono sull'intervallo di definizione. □

Diciamo che un aperto $W \subset \mathbb{R} \times M$ è radiale se per ogni p,

$$W \cap \mathbb{R} \times \{p\} = I_p \times \{p\},$$

dove I_p è un intervallo.

Teorema 39. *Sia X campo di vettori su M. Allora esiste un aperto radiale $W \subset \mathbb{R} \times M$ che contiene $\{0\} \times M$, e una mappa C^∞*

$$\phi \colon W \to M$$

tale che le mappe $\phi_x \colon (a, b) \to M$, $\phi_x(t) = (t, x)$ sono orbite di X passanti per $\phi_x(0) = x$. Inoltre ϕ è unica, nel senso che ogni altra $\phi' \colon W' \to M$ con la stessa proprietà coincide con ϕ su $W \cap W'$.

Dimostrazione. Sia $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ un atlante. Su ogni U_α il teorema di Peano dà una mappa $\phi_\alpha \colon W_\alpha \to U_\alpha$, C^∞. Adesso se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, vediamo che $\phi_\alpha = \phi_\beta$ su $W_\alpha \cap W_\beta$ per l'unicità: infatti per ogni $p \in U_\alpha$, $t \to \phi_\alpha(t, p)$ e $t \to \phi_\beta(t, p)$ sono orbite passanti per p, e quindi coincidono per il lemma. □

Si dice che ϕ è il *flusso* di X:

Corollario 40. *Se (t, x), $(s, \phi(t, x))$ e $(t + s, x)$ stanno in W, allora*

$$\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x).$$

Dimostrazione. Poichè W è radiale, $I_x = (a, b)$ contiene $s, t, s + t$. Allora

$$u \to \phi(u, \phi(t, x)), \quad u \to \phi(u + t, x)$$

sono orbite che partono da $\phi(t, x)$ e quindi coincidono in $u = s$. □

Osservazione. In particolare se $W = \mathbb{R} \times M$, allora

$$\phi^s \circ \phi^t = \phi^{s+t}, \quad \phi^s = \phi(s, \cdot).$$

In questo caso ϕ^t è un diffeomorfismo con inversa ϕ^{-t}, e si ha un omomorfismo di gruppi

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M), \quad t \to \phi^t$$

dove $\mathrm{Diff}(M)$ è il gruppo dei diffeomorfismi di M. Vedremo in seguito che quando M è compatta si può sempre supporre $W = \mathbb{R} \times M$.

Esercizio 41. Sia θ la coordinata su S^1 determinata dalla parametrizzazione

$$(a, a + 2\pi) \ni \theta \to S^1, \quad \theta \to e^{i\theta};$$

si determinino le orbite di $\frac{\partial}{\partial\theta}$ e il flusso ϕ.

Esercizio 42. Dimostrare che

$$f\colon S^{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n}, \quad f(x_1, \dots, x_{2n}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1})$$

definisce un campo di vettori su S^{2n-1}. Determinarne le orbite.

Esercizio 43. Sia M una varietà compatta, e X un campo di vettori. Dimostrare che il dominio di definizione massimale del flusso di X è $W = \mathbb{R} \times M$.

Esercizio 44. Dato un campo di vettori X su M, e p in M con $X_p \neq 0$, costruire una carta centrata in p su cui $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

11 Teorema di Frobenius [5]

Una *distribuzione* di rango k su M è un sottoinsieme $D \subset TM$ tale che per ogni $p \in M$:

- $D_p = D \cap T_pM$ è un sottospazio vettoriale di dimensione k;
- esistono campi di vettori locali $X_1, \dots, X_k$ che generano D in un intorno di p, cioè per ogni q in un intorno di p, $(X_1)_q, \dots, (X_k)_q$ è una base di D_q.

Si dice che un campo di vettori è contenuto in D se la sua immagine lo è, cioè $X_p \in D_p$ per ogni p.

Una varietà integrale di D è una sottovarietà immersa $f\colon L \to M$ tale che $df_p(T_pN) = D_{f(p)}$ per ogni $p \in L$. Una distribuzione di rango k è *integrabile* se intorno a ogni punto esiste un sistema di coordinate $x_1, \dots, x_d$ tale che le equazioni

$$\{x_{k+1} = c_{k+1}, \dots, x_d = c_d\} \tag{7}$$

definiscono sottovarietà integrali di D al variare di $c_{k+1}, \dots, c_d$ in $\mathbb{R}$.

Osservazione. Le sottovarietà definite da (7) sono sottovarietà regolari; tuttavia, in generale le varietà integrali non sono sottovarietà regolari, anche quando la distribuzione è integrabile. Ad esempio, la distribuzione

$$\operatorname{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

in $S^1 \times S^1 = \{(e^{ix}, e^{iy})\}$ è integrabile, ma abbiamo visto che se λ è irrazionale ci sono sottovarietà integrabili non regolari (Esercizio 27).

Teorema 41 (Frobenius)**.** *Sia D una distribuzione di rango k. Sono equivalenti:*

(i) *D è integrabile.*

(ii) *per ogni punto di D passa una sottovarietà integrale di D;*

(iii) *per ogni coppia di campi di vettori X, Y contenuti in D anche $[X, Y]$ lo è.*

Dimostrazione. $i) \implies ii)$ è ovvia.

$ii) \implies iii)$. Sia $f\colon L \to M$ una varietà integrale. Allora presi X, Y contenuti in D esistono unici $\tilde{X}, \tilde{Y}\colon L \to TL$ che fanno commutare i diagrammi

$$\begin{tikzcd} TL \arrow[r, "df"] & TM \\ L \arrow[u, "\tilde{X}"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TL \arrow[r, "df"] & TM \\ L \arrow[u, "\tilde{Y}"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}.$$

Per vedere che sono campi di vettori, basta verificare che se $x_1, \dots, x_k$ sono coordinate su L allora le $(\tilde{X})x_i$ sono C^∞. Poichè f è un'immersione, possiamo supporre che $x_i = y_i \circ f$ dove le y_i sono una sottofamiglia di un sistema di coordinate su N. Adesso

$$\tilde{X}_p(y_i \circ f) = df_p(\tilde{X}_p)y_i = X_{f(p)}y_i$$

che dipende da p in modo C^∞.

Per costruzione $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ sono f-correlati a X, Y, quindi il prodotto di Lie è f-correlato a $[X, Y]$. In particolare

$$[X, Y]_{f(p)} = df_p([\tilde{X}, \tilde{Y}]_p) \in D_{f(p)};$$

poichè per ogni punto di M passa una sottovarietà integrale, segue che $[X, Y]$ è contenuto in D.

$iii) \implies i)$. Si procede per induzione sul rango di k. Se $k = 1$, D è generata localmente da un campo di vettori della forma $\frac{\partial}{\partial x_1}$ (esercizio 44), quindi è banalmente integrabile.

Supponiamo che l'implicazione valga per $k-1$, e sia D una distribuzione di rango k generata localmente da $X_1, \dots, X_k$. Possiamo scegliere un sistema di coordinate locali centrata in p su un aperto U per cui $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$; possiamo anche supporre che

$$\phi(U) = (-a, a) \times W.$$

Siano adesso

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_2 - X_2(x_1)X_1, \quad \dots \quad Y_k = X_k - X_k(x_1)X_1.$$

Allora gli Y_i sono campi di vettori che generano localmente D. Sia

$$S = \{q \in U \mid x_1(q) = 0\};$$

allora gli Y_i ristretti a S, $i > 1$ definiscono campi di vettori Z_i, cioè se $\iota\colon S \to U$ è l'inclusione esistono campi di vettori Z_i su S ι-correlati agli Y_i. Questo perché

$$Y_i(x_1) = 0, \quad i > 1.$$

Gli Z_i generano una distribuzione D' di rango $k-1$. Inoltre D' soddisfa la condizione (iii). Infatti

$$[Y_i, Y_j]x_1 = Y_i Y_j x_1 - Y_j Y_i x_1 = 0, \quad i, j > 1.$$

Poiché D soddisfa la condizione (3), segue che $[Y_i, Y_j] \in \operatorname{Span}\{Y_2, \dots, Y_k\}$ in ogni punto, e quindi è ι-correlato a qualche campo di vettori contenuto in D'. Quindi i prodotti $[Z_i, Z_j]$ sono contenuti in D'. Segue per le proprietà del prodotto di Lie che D' soddisfa la condizione (iii).

Usando l'ipotesi induttiva, a meno di restringere U e quindi S otteniamo coordinate $y_2, \dots, y_d$ su S tali che la distribuzione D' abbia varietà integrali del tipo

$$y_{k+1} = c_{k+1}, \dots, y_d = c_d.$$

Queste coordinate possono essere estese a $U \cong (-a, a) \times S$ aggiungendovi $y_1 = x_1$. Basta ora dimostrare che

$$Y_i y_j = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = k+1, \dots, d. \tag{8}$$

Infatti se vale questo allora gli Y_i sono combinazione dei $\frac{\partial}{\partial y_j}$ con $j = 1, \dots, k$, cioè gli Y_i e i $\frac{\partial}{\partial y_j}$ generano la stessa distribuzione. Questo significa che le sottovarietà regolari

$$y_{k+1} = c_{k+1}, \dots, y_d = c_d$$

sono varietà integrali della distribuzione D, che quindi è integrabile.

Per dimostrare (8), osserviamo che

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1};$$

questo perchè $Y_1 y_j = \delta_{1j}$. Quindi se $j > k$,

$$\frac{\partial}{\partial y_1} Y_i(y_j) = Y_1 Y_i(y_j) = [Y_1, Y_i] y_j = \sum_h c_{ih} Y_h y_j,$$

dove le c_{ih} sono funzioni su U.

In altri termini, per $j > k$ fissato, $p \in W$, le funzioni

$$f_i(t) = Y_i y_j(\phi^{-1}(t, p))$$

soddisfano il sistema di ODE

$$\frac{d}{dt} f_i(t) = \sum c_{ih}(\phi^{-1}(t, p)) f_h(t).$$

Poichè $f_i = 0$ per $t = 0$, in quanto $Y_i = Z_i$ su $y_1 = 0$ e per definizione delle coordinate y_j, la soluzione è $f_i \equiv 0$, e quindi vale (8). □

Esercizio 45. Se $f\colon M \to N$ è una sommersione, mostrare direttamente che valgono le tre condizioni del Teorema di Frobenius per la distribuzione $\ker df$.

Teorema 42. *Data una distribuzione integrabile D su N e una varietà integrale $\iota\colon P \to N$, per ogni mappa C^∞, $f\colon M \to N$, con $f(M) \subset \iota(P)$, la mappa $\tilde{f}$ che fa commutare il diagramma*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & N \\ & P \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

è C^∞.

Dimostrazione. Per il Teorema 27 basta dimostrare che è continua.

Sia p in M. Per definizione esiste un aperto coordinato V centrato in $f(p)$ tale che

$$\{q \in V \mid x_{k+1}(q) = c_{k+1}, \dots, x_d(q) = c_d\}$$

sono sottovarietà integrali. Possiamo supporre che le x_i si annullino in p.

Sia W la componente connessa di $f^{-1}(V)$ che contiene p; W è aperto perchè $f^{-1}(V)$ è aperto e le varietà sono localmente connesse. Analogamente è aperta la componente connessa U di $\iota^{-1}(V)$ che contiene $\tilde{f}(p)$. A meno di restringere V,

$$\iota(U) = \{q \in V \mid x_{k+1}(q) = 0, \dots, x_d(q) = 0\}: \tag{9}$$

questo perchè per ogni q in U

$$\operatorname{Im} d\iota_q = D_{\iota(q)} = \operatorname{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$$

e quindi se $j > k$ $dx_j \circ di \equiv 0$, cioè $d(x_j \circ \iota) = 0$, e dunque x_j è costante lungo il connesso $\iota(U)$. Quindi vale l'inclusione $\subset$ in (9); in particolare, $\iota|_U$ è un embedding, per cui possiamo restringere V in modo che valga (9).

Adesso basta dimostrare che $f(W) \subset \iota(U)$: se è vero questo, allora $\tilde{f}(W) \subset U$, e $\tilde{f}|_W\colon W \to U$ è la composizione di $\iota|_U^{-1}$ con f, e quindi continua.

Consideriamo la mappa

$$\pi\colon V \to \mathbb{R}^{d-k}, \pi(q) = (x_{k+1}(q), \dots, x_d(q))$$

Poichè $d(\pi\circ\iota) = 0$, la funzione $\pi\circ\iota$ è localmente costante su $\iota^{-1}(V)$. Essendo P a base numerabile per definizione, segue che $\pi\circ\iota(\iota^{-1}(V))$ è un insieme numerabile. Osserviamo che $f(W) \subset \iota(P) \cap V$ è connesso, quindi $\pi(f(W))$ è numerabile e connesso, quindi è un solo punto, cioè 0 perché $\pi(f(p)) = 0$. In altri termini,

$$f(W) \subset \{x_{k+1} = 0, \dots, x_d = 0\} = \iota(U).$$ □

Esercizio 46. Siano X, Y i campi di vettori su $M = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ dati da

$$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_3}$$
$$Y = x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_4\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_4}$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^*$, sia

$$r_\lambda\colon M \to M, \quad r_\lambda(p) = \lambda p.$$

(i) Dimostrare che, per ogni λ, X è r_λ-correlato a X e Y è r_λ-correlato a Y.

(ii) Dimostrare che
$$D = \{(p; v) \in TM \mid v \in \operatorname{Span}\{X_p, Y_p\}\}$$
è una distribuzione e determinare se è integrabile.

(iii) Si consideri la proiezione
$$\pi \colon M = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^3, \quad \pi(p) = [p].$$
Determinare $\ker d\pi_p$ per ogni p in M.

(iv) Dimostrare che
$$D' = \bigcup_{p \in M} d\pi_p(D_p)$$
è una distribuzione su $\mathbb{RP}^3$.

(v) Determinare se D' è integrabile.

12 Prodotti tensoriali e algebra esterna, [5]

Siano V, W spazi vettoriali. Si dice che una coppia (U, f) è un prodotto tensore di V e W se

(i) U è uno spazio vettoriale

(ii) $f \colon V \times W \to U$ è una mappa bilineare,

(iii) data ogni altra coppia (U', f') che soddisfa (i) e (ii) esiste un'unica mappa lineare $\eta \colon U \to U'$ che fa commutare il diagramma
$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & U \arrow[d, "\eta"] \\ & U' \end{tikzcd} .$$

Teorema 43. *Il prodotto tensore esiste ed è unico a meno di isomorfismo canonico.*

Dimostrazione. Sia $F(V, W)$ lo spazio vettoriale libero sulle coppie $(v, w) \in V \times W$,
$$F(V, W) = \bigoplus_{(v,w) \in V \times W} \mathbb{R}.$$
In altre parole, $F(V, W)$ è costituito da combinazioni lineari formali di coppie (v, w):
$$F(V, W) = \{\lambda_1(v_1, w_1) + \ldots + \lambda_k(v_k, w_k) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in V, w_i \in W\}.$$

Sia $R(V, W)$ il sottospazio generato dagli elementi del tipo

$$\lambda(v, w) - (\lambda v, w), \lambda(v, w) - (v, \lambda w), (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w),$$
$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2). \quad (10)$$

Il quoziente
$$V \otimes W = F(V, W)/R(V, W)$$
è uno spazio vettoriale. Dato (v, w) in $V \times W$, la classe $[(v, w)]$ in $V \otimes W$ si indica con $v \otimes w$. Questo definisce una mappa bilineare

$$f : V \times W \to V \otimes W, \quad f(v, w) = v \otimes w.$$

La bilinearità segue dalle relazioni (10).

Quindi $(V \otimes W, f)$ soddisfa le condizioni (i) e (ii). Se (U', f') soddisfa le stesse condizioni, allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & V \otimes W \arrow[d, "\eta"] \\ & U' \end{tikzcd}$$

commuta se e solo se vale

$$\eta(v \otimes w) = f'(v, w).$$

Usando le relazioni (10), la bilinearità di f', e il fatto che i prodotti $v \otimes w$ generano $V \otimes W$, si vede che esiste un'unica η lineare siffatta.

In particolare, il prodotto tensore è unico perché se (U', f') soddisfa anche (iii), allora abbiamo un diagramma

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & U' \arrow[d, "\eta'"] \\ & V \otimes W \end{tikzcd} ,$$

e η' ed η sono inverse l'una dell'altra. Quindi η è un isomorfismo, ed è canonico nel senso che è l'unico che fa commutare il diagramma. □

Corollario 44. *Se $\{v_i\}_{i\in I}$ è una base di V e $\{w_j\}_{j\in J}$ è una base di W, allora*

$$\{v_i \otimes w_j\}_{i\in I, j\in J}$$

è una base di $V \otimes W$.

Dimostrazione. Sappiamo che le coppie (v, w) generano $F(V, W)$, quindi i prodotti $v \otimes w$ generano $V \otimes W$. Inoltre se

$$v = \lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_k v_{i_k}, \quad w = \mu_1 w_{j_1} + \ldots + \mu_h w_{j_h},$$

allora $v \otimes w$ è combinazione lineare di prodotti $v_{i_n} \otimes w_{j_m}$.

Inoltre i $v_i \otimes w_j$ sono linearmente indipendenti: supponiamo altrimenti. Allora esistono un numero finito di vettori $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ e $w_{j_1}, \dots, w_{j_m}$ con una combinazione lineare

$$\sum_{h,k} c_{hk} v_{i_h} \otimes w_{j_k} = 0.$$

Questo significa che ogni mappa bilineare $f\colon V \times W \to U$ soddisfa

$$\sum_{h,k} c_{hk} f(v_{i_k}, w_{j_k}) = 0$$

che è possibile solo se $c_{hk} = 0$. □

Esercizio 47. Dimostrare che $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ non si può scrivere come prodotto $v \otimes w$.

Osservazione. Ogni elemento di $V \otimes W$ è somma di un numero finito di elementi della forma $v \otimes w$.

Proposizione 45. *Ci sono isomorfismi canonici*

(i) $V \otimes W \cong W \otimes V$*;*

(ii) $V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U$*;*

(iii) *e, se V ha dimensione finita,* $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W)$*;*

Dimostrazione. Per (1), prendiamo la mappa $\sigma(v \otimes w) = w \otimes v$. Questa è l'unica mappa indotta dalla mappa bilineare

$$V \times W \to W \otimes V, \quad (v, w) \to w \otimes v.$$

Viceversa, prendiamo $\rho(w \otimes v) = v \otimes w$. Allora $\rho \circ \sigma$ coincide con l'identità sulla base, per cui σ e ρ sono l'una l'inversa dell'altra.

Per (2) osserviamo che $V \otimes (W \otimes U)$ è generato da elementi della forma $v \otimes (w \otimes u)$; quindi prendiamo la mappa che sui generatori si comporta come

$$v \otimes (w \otimes u) \to (v \otimes w) \otimes u;$$

questa è la mappa lineare indotta da

$$(v, (w \otimes u)) \to (v \otimes w) \otimes u.$$

L'inversa è costruita in modo analogo.

Per (3), costruiamo una mappa lineare

$$F\colon V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W), \quad F(\eta \otimes w)(v) = \eta(v)w.$$

Se $\{v_i\}$ è una base di V, con base duale η_i di V^*, allora l'inversa è data da

$$G\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to V^* \otimes W, \quad Gf = \sum \eta_i \otimes f(v_i). \qquad □$$

Esercizio 48. Se V, W hanno dimensione infinita, la mappa $F\colon V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ non è suriettiva.

Nel resto della sezione supporremo che tutti gli spazi vettoriali abbiano dimensione finita. In particolare avremo bisogno del seguente:

Lemma 46. *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita esiste un isomorfismo canonico $V \cong V^{**}$, dato da*

$$L\colon V \to V^{**}, \quad L(v)(\eta) = \eta(v), \quad \eta \in V^*.$$

Dimostrazione. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, e $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ la base ad essa duale di V^*, allora

$$L(v_i)(\eta_j) = \delta_{ij},$$

cioè $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ è la base duale a $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ di V^{**}: quindi L manda basi in basi ed è un isomorfismo. □

Sia ora V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Si definiscono:

- lo *spazio dei tensori* di tipo r, s

  $$V_{r,s} = V^{\otimes^r} \otimes (V^*)^{\otimes s}.$$

  Qui $V^{\otimes^r}$ è il prodotto tensoriale di V per se stesso r volte; per $r = 0$, si intende che $V^{\otimes^r} = \mathbb{R}$. In particolare, $V_{0,0} = \mathbb{R}$.

- la *algebra dei tensori*

  $$T(V) = \bigoplus_{r \geq 0, s \geq 0} V_{r,s}.$$

  Questo è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale che ha una struttura di $\mathbb{R}$-algebra associativa, non commutativa, con unità, bigraduata definita da

  $$\begin{aligned}&(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_s) \cdot (v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_{r'} \otimes w'_1 \otimes \cdots \otimes w'_{s'}) \\ &\quad = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_{r'} \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_s \otimes w'_1 \otimes \cdots \otimes w'_{s'}).\end{aligned}$$

  L'algebra è bigraduata nel senso che $V_{r,s} \cdot V_{r',s'} \subset V_{r+r',s+s'}$.

- la *algebra esterna*

  $$\Lambda(V) = \frac{C(V)}{I(V)},$$

  dove $C(V)$ è la sottoalgebra di $T(V)$

  $$C(V) = \bigoplus_{r \geq 0} V_{r,0},$$

  e $I(V)$ è il suo ideale bilatero generato da

  $$\{v \otimes v \mid v \in V\}.$$

  In altri termini $I(V)$ è il più piccolo sottospazio di $C(V)$ che contiene i prodotti $v \otimes v$ ed è chiuso per moltiplicazione a sinistra e a destra per elementi di $C(V)$.

  Poichè i generatori $v \otimes v$ sono omogenei, $I(V)$ è un ideale graduato, nel senso che

  $$I(V) = \bigoplus I_k(V), \quad I_k(V) = I(V) \cap V_{k,0}.$$

Quindi il quoziente è anch'esso un'algebra graduata,

$$\Lambda(V) = \bigoplus_k \Lambda_k(V), \quad \Lambda_k(V) = \frac{V_{k,0}}{I_k(V)},$$

il cui prodotto si indica con $\wedge$. Poiché $V_{k,0}$ è generato da prodotti del tipo $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$, $\Lambda_k(V)$ è generato da elementi del tipo

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k.$$

Lo spazio $\Lambda_k(V)$ si dice *prodotto esterno* k-esimo e soddisfa una proprietà universale simile a quella che definisce il prodotto tensore. Si dice che una mappa multilineare $f\colon V^r \to \mathbb{R}$ è *alternante* se

$$f(v_1, \dots, v_r) = (-1)^{|\sigma|} f(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_r})$$

per ogni permutazione $\sigma \in S^r$.

Esercizio 49. Dimostrare che la mappa $V^r \times (V^*)^s \to V_{r,s}$ induce un isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni multilineari

$$V^r \times (V^*)^s = V \times \cdots \times V \times V^* \times \times V^*$$

a valori in $\mathbb{R}$ e $(V_{r,s})^*$.

Esercizio 50. In $\Lambda(V)$, $v \wedge w = -w \wedge v$.

Esercizio 51. Si dice che una coppia (U, f) soddisfa la proprietà universale per mappe k-multilineari alternanti su V se

(i) U è uno spazio vettoriale;

(ii) $f\colon V^k \to U$ è una mappa multilineare alternante;

(iii) data ogni altra coppia (U', f') che soddisfa (1) e (2) esiste un'unica mappa lineare $\eta\colon U \to U'$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & U \arrow[d, "\eta"] \\ & U' \end{tikzcd} .$$

Dimostrare che a meno di isomorfismo canonico esiste un'unica coppia (U, f) che soddisfa questa proprietà universale, cioè $U = \Lambda_k(V)$, $f(v_1, \dots, v_k) = v_1 \wedge \dots v_k$.

Esercizio 52. Sia $v_1, \dots, v_d$ una base di V; dimostrare che l'insieme

$$\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k\}.$$

è una base di $\Lambda_k(V)$, che ha quindi dimensione $\binom{d}{k}$.

Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Una *dualità* (pairing) tra V e W è una mappa bilineare

$$(,)\colon V \times W \to \mathbb{R}$$

tale che per ogni $v \in V\setminus\{0\}$ esiste $w \in W$ con $(v,w) \neq 0$, e per ogni $w \in W\setminus\{0\}$ esiste $v \in V$ tale che $(v,w) \neq 0$.

Una dualità definisce isomorfismi $\phi\colon V \cong W^*$, $\psi\colon W \cong V^*$ mediante

$$\phi(v)(w) = (v,w), \quad \psi(w)(v) = (v,w).$$

Definiamo le seguenti dualità:

- $V^*_{r,s}$ con $V_{r,s}$, mediante la mappa definita sui generatori da

  $$(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_r \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_s, w_1 \otimes \cdots \otimes w_r \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_s) = \prod_{i=1,j=1}^{r,s} \eta_i(w_i)\xi_j(v_j).$$

  Abbiamo usato l'isomorfismo $V = V^{**}$ del Lemma 46.

  Quindi $V^*_{r,s} \cong (V_{r,s})^*$ è isomorfo allo spazio delle applicazioni multilineari

  $$V^r \times (V^*)^s \to \mathbb{R}.$$

- $\Lambda_k(V^*)$ con $\Lambda_k(V)$ mediante la mappa definita sui generatori da[2]

  $$\big(\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k\big) = \det(\eta_i(v_j))_{ij}.$$

  Ne discende (per l'esercizio 51) che $\Lambda_k(V^*)$ è isomorfo allo spazio delle applicazioni k-multilineari alternanti su V. Esplicitamente, se α è in $\Lambda_k(V^*)$, l'applicazione multilineare alternante associata è data da

  $$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = (\alpha, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k).$$

Esercizio 53. Se $\{v_1, \ldots v_d\}$ è una base di V, e $\{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$ è la base duale di V^*, allora $\{\eta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \eta_{i_k}\}$ è la base di $\Lambda_k(V^*) \cong (\Lambda_k V)^*$ duale alla base $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}\}$

Possiamo adesso esprimere il prodotto esterno in termini di applicazioni multilineari. Denotiamo con S_{p+q} l'insieme delle permutazioni di $p+q$ elementi; una permutazione σ in S_{p+q} si dice p,q-*shuffle* se $\sigma_1 < \cdots < \sigma_p$ e $\sigma_{p+1} < \cdots < \sigma_{p+q}$.

Proposizione 47. *Se $\alpha \in \Lambda_p V^*$, $\beta \in \Lambda_q V^*$, allora*

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta)&(v_1, \ldots, v_{p+q})\\ &= \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^{|\sigma|} \frac{1}{p!q!} \alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_p}) \beta(v_{\sigma_{p+1}}, \ldots, v_{\sigma_{p+q}})\\ &= \sum_{\sigma\ p,q\text{-shuffle}} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_p}) \beta(v_{\sigma_{p+1}}, \ldots, v_{\sigma_{p+q}}).\end{aligned}$$

Dimostrazione. Per linearità basta dimostrarlo per α e β elementi di una base; poniamo quindi

$$\alpha = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_p, \quad \beta = \eta_{p+1} \wedge \cdots \wedge \eta_{p+q},$$

[2]Questa è la scelta di [5, 2]. Altri autori mettono un coefficiente nel definire questa dualità.

dove gli η_i non sono necessariamente distinti. Per definizione

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\beta(v_1,\dots,v_{p+q}) = \det(\eta_i(v_j)) &= \sum_{\sigma\in S_{p+q}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=1}^{p+q}\eta_i(v_{\sigma_i})\\ &= \sum_{\sigma\in S_{p+q}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=1}^{p}\eta_i(v_{\sigma_j})\prod_{j=1}^{q}\eta_{j+p}(v_{\sigma_{j+p}}),\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{|\sigma|}\alpha(v_{\sigma_1},\dots,v_{\sigma_p}) = p!\alpha(v_1,\dots,v_p).$$

e lo stesso vale per β; quindi basta dimostrare che $\alpha\wedge\beta(v_1,\dots,v_{p+q})$ coincide con

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\ p,q\text{-shuffle}}(-1)^{|\sigma|}\alpha(v_{\sigma_1},\dots,v_{\sigma_p})\beta(v_{\sigma_{p+1}},\dots,v_{\sigma_{p+q}})\\ &= \sum_{\sigma\ p,q\text{-shuffle}}(-1)^{|\sigma|}\sum_{\rho\in S_p}(-1)^{|\rho|}\eta_1(v_{\sigma_{\rho_1}})\cdots\eta_p(v_{\sigma_{\rho_p}})\sum_{s\in S_q}(-1)^{|s|}\eta_{p+1}(v_{\sigma_{p+s_1}})\cdots\eta_{p+q}(v_{\sigma_{p+s_q}})\\ &= \sum_{\sigma\in S_{p+q}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=1}^{p+q}\eta_i(v_{\sigma_i}). \quad\square\end{aligned}$$

Esercizio 54. Dedurre dalla Proposizione 47 che se $\alpha\in\Lambda_1(V)$ e $\beta\in\Lambda_k(V)$, allora

$$\alpha\wedge\beta(X_0,\dots,X_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\alpha(X_i)\beta(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k).$$

13 Forme differenziali e tensori [5]

Data una varietà M^d definiamo

- $T_{r,s}M = \bigcup_{p\in M}(T_pM)_{r,s}$;
- $\Lambda^kM = \bigcup_{p\in M}\Lambda_k(T_p^*M)$ (in particolare $T^*M = \Lambda^1M$).
- $\Lambda M = \bigcup_{p\in M}\Lambda(T_p^*M)$.

In particolare

$$\Lambda^0M = M\times\mathbb{R} = T_{0,0}M.$$

Osserviamo che la scelta di una base di T_pM determina isomorfismi

$$(T_pM)_{r,s}\cong(\mathbb{R}^d)_{r,s},\quad \Lambda_k(T_p^*M)\cong\Lambda^k(\mathbb{R}^d),\quad \Lambda(T_p^*M)\cong\Lambda(\mathbb{R}^d).$$

Infatti se $f\colon T_pM\to\mathbb{R}^d$ è isomorfismo lineare, allora

$$\hat{f}(v_1\otimes\cdots\otimes v_d\otimes\eta_1\otimes\cdots\otimes\eta_d) = f(v_1)\otimes\cdots\otimes f(v_d)\otimes(f^t)^{-1}\eta_1\otimes\cdots\otimes(f^t)^{-1}(\eta_d)$$

$$\hat{f}(\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_k) = (f^t)^{-1}\eta_1\wedge\cdots\wedge(f^t)^{-1}(\eta_d)$$

è pure un isomorfismo.

In particolare se $\phi\colon U \to \mathbb{R}^d$ è una carta, abbiamo identificazioni naturali

$$\tilde{\phi}\colon \{(p;\alpha) \in T_{r,s}M \mid p \in U\} \to \phi(U) \times (\mathbb{R}^d)_{r,s}, \quad \tilde{\phi}(p;\alpha) = (\phi(p); \widehat{d\phi_p}(\alpha)).$$

$$\tilde{\phi}\colon \{(p;\alpha) \in \Lambda^k M \mid p \in U\} \to \phi(U) \times \Lambda_k(\mathbb{R}^d), \quad \tilde{\phi}(p;\alpha) = (\phi(p); \widehat{d\phi_p}(\alpha)).$$

$$\tilde{\phi}\colon \{(p;\alpha) \in \Lambda M \mid p \in U\} \to \phi(U) \times \Lambda(\mathbb{R}^d), \quad \tilde{\phi}(p;\alpha) = (\phi(p); \widehat{d\phi_p}(\alpha)).$$

dove i codomini sono aperti in uno spazio vettoriale.

Teorema 48. *$T_{r,s}M$, $\Lambda^k M$ e ΛM hanno un'unica struttura di varietà per cui le mappe $\tilde{\phi}$ sono carte. Allora le proiezioni*

$$\pi\colon T_{r,s}M \to M, \quad \pi\colon \Lambda^k M \to M, \quad \pi\colon \Lambda M \to M$$

sono C^∞.

Dimostrazione. Basta osservare che l'isomorfismo $\hat{f}$ definito sopra dipende in modo C^∞ da f. Infati se ϕ e ψ sono due carte su M, allora

$$(p;\alpha) \xrightarrow{\tilde{\phi}\circ\tilde{\psi}^{-1}} (\phi(\psi^{-1}(\alpha)), d\widehat{(\phi\circ\psi^{-1})}_p(\alpha))$$

è C^∞. Si procede quindi come nel Teorema 21. $\square$

In analogia con i campi di vettori diamo le seguenti definizioni:

- un *tensore* di tipo r, s su M è una mappa C^∞ $\alpha\colon M \to T_{r,s}M$, $\pi \circ \alpha = \mathrm{Id}$;
- una *k-forma differenziale*, o semplicemente k-forma, è una mappa C^∞ $\alpha\colon M \to \Lambda^k M$, $\pi \circ \alpha = \mathrm{Id}$;
- una *forma differenziale* su M è una mappa C^∞ $\alpha\colon M \to \Lambda M$, $\pi \circ \alpha = \mathrm{Id}$.

Le k-forme su M definiscono uno spazio vettoriale $\Omega^k(M)$; vale

$$\Omega(M) = \sum_{k=0}^{d} \Omega^k(M).$$

Quindi $\Omega(M)$ è un'algebra graduata. Inoltre $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. In particolare, $\Omega(M)$ è una $C^\infty(M)$-algebra.

Osservazione. Come per i campi di vettori, una mappa $\alpha\colon M \to \Lambda^k(M)$ tale che $\pi \circ \alpha = \mathrm{Id}$ è C^∞, e quindi una forma differenziale, se e solo se si scrive localmente

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le d} a_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

con le $a_{i_1,\ldots,i_k}$ funzioni C^∞.

Una k-forma definisce per ogni punto p una mappa k-multilineare alternante

$$\alpha_p\colon T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}, \quad \alpha_p(v_1,\ldots,v_k) = (\alpha_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k);$$

useremo anche la notazione

$$\alpha(p; v_1, \ldots, v_k).$$

In particolare i coefficienti nella forma locale sono dati da

$$a_{i_1,\ldots,i_k}(p) = \alpha\left(p; \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right).$$

Definiamo adesso un operatore

$$d\colon \Omega(M) \to \Omega(M),$$

detto derivata esterna. Per cominciare, osserviamo che se $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, allora $df\colon TM \to \mathbb{R}$ definisce una 1-forma

$$df\colon M \to \Lambda^1 M, \quad df(p) = (p; df_p).$$

Vogliamo estenderlo a un'antiderivazione di grado 1, cioè un endomorfismo $\mathbb{R}$-lineare di $\Omega(M)$, con la proprietà che

$$d(\Omega^k(M)) \subset \Omega^{k+1}(M),$$
$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \beta, \quad \alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^h(M).$$

Osserviamo che la definizione di $d\colon \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ soddisfa quest'ultima equazione per la regola di Leibniz.

Teorema 49. *Esiste un'unica antiderivazione $d\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ di grado 1 tale che $d \circ d = d^2 = 0$ e d coincide con il differenziale per le funzioni su M.*

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima il teorema per un aperto coordinato U con coordinate $x_1, \dots, x_d$.

Per l'esistenza, osserviamo che ogni k-forma su U si scrive in un unico modo come somma di elementi della forma $f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Definiamo quindi una mappa additiva

$$d\colon \Omega(U) \to \Omega(U)$$

che sui generatori soddisfa

$$d(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k};$$

questa è banalmente $\mathbb{R}$-lineare e di grado 1. Per linearità basta verificare che è un'antiderivazione sui generatori,

$$\begin{aligned} d\left((f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \wedge (g dx_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+h}})\right) \\ = d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+h}} \\ = (g df + f dg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+h}} = df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge g dx_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+h}} \\ + (-1)^k f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dg \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+h}}. \end{aligned}$$

Infine,

$$\begin{aligned} d^2(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) &= d(df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\ &= d\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right) \\ &= \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}; \end{aligned}$$

questa quantità si annulla perché scambiando j e k cambia di segno.

Per dimostrare l'unicità, osserviamo che se d' è un'altro operatore con le stesse proprietà, allora

$$d'(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = d'f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} + f d'(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k});$$

d'altra parte il secondo termine si annulla perché d' è un'antiderivazione e

$$d' dx_i = d'^2 x_i = 0;$$

inoltre $df = d'f$ per ipotesi, quindi $d = d'$.

Grazie all'unicità, $d \colon \Omega(U) \to \Omega(U)$ non dipende dalla scelta delle coordinate; quindi i d si incollano e definiscono $d \colon \Omega(M) \to \Omega(M)$. Questo dà l'esistenza globale. Per l'unicità globale occorre osservare che dato un operatore $d' \colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ che soddisfa le condizioni richieste, se g è una funzione C^∞ che ha supporto contenuto in un aperto coordinato U e identicamente uguale a 1 in un intorno di p, allora

$$d'(g\alpha) = d'g \wedge \alpha + g \wedge d'\alpha;$$

in particolare $d'(g\alpha)(p) = d'\alpha(p)$. Poiché $g\alpha$ si può scrivere a sua volta come combinazione di funzioni della forma

$$f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

e abbiamo già visto che d' deve coincidere con d su forme di questo tipo, segue che $d'\alpha(p) = d\alpha(p)$ per ogni p. □

Data una mappa $f \colon M \to N$ definiamo la mappa di *pull-back*

$$f^* \colon \Omega(N) \to \Omega(M),$$

definita così: se α è una k-forma, allora

$$f^*\alpha(p; v_1, \ldots, v_k) = \alpha(f(p); df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k)).$$

Osserviamo che:

- Per $k = 0$, f^* è la composizione a destra, $f^*g = g \circ f$.
- $(f^*\alpha)_p$ dipende solo da $\alpha_{f(p)}$, cioé f^* è determinata dal suo comportamento puntuale.
- Su un aperto coordinato su N, f^* agisce come

  $$f^*(g dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = (g \circ f) d(x_{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge d(x_{i_k} \circ f).$$

  In particolare, questo dimostra che $f^*\alpha$ è C^∞, cioè che f è ben definita.
- Se $g \colon \Omega(P) \to \Omega(M)$, allora $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
- Se $U \subset N$ è un aperto e $f \colon U \to N$ è l'inclusione, allora $f^*\alpha$ si può identificare con la restrizione di α a U, nel senso che fa commutare il diagramma

  $$\begin{tikzcd} \Lambda^k U \arrow[r] & \Lambda^k M \\ U \arrow[u, "f^*\alpha"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd},$$

  dove le frecce orizzontali sono inclusioni. In questo caso, scriveremo anche $\alpha|_U$ al posto di f^*U.

Proposizione 50. *f^* è un omomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre che commuta con d.*

Dimostrazione. La $\mathbb{R}$-linearità è ovvia; dobbiamo dimostrare innanzitutto che

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

Per ogni multivettore $(x; v_1, \ldots, v_{p+q})$ vale

$$f^*(\alpha \wedge \beta)(x; v_1, \ldots, v_{p+q}) = (\alpha \wedge \beta)(f(x); df_x(v_1), \ldots, df_x(v_{p+q}))$$
$$= \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^{|\sigma|} \frac{1}{p!q!} \alpha(f(x); df_x v_{\sigma_1}, \ldots, df_x v_{\sigma_p}) \beta(f(x); df_x v_{\sigma_{p+1}}, \ldots, df_x v_{\sigma_{p+q}}).$$

D'altra parte

$$(f^*\alpha \wedge f^*\beta)(x; v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^{|\sigma|} \frac{1}{p!q!} f^*\alpha(x; v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_p}) f^*\beta(x; v_{\sigma_{p+1}}, \ldots, v_{\sigma_{p+q}}).$$

Per verificare che $d \circ f^* = f^* \circ d$, osserviamo dapprima che per g in $C^\infty(N)$, vale

$$d(f^*g)(p; v) = d(g \circ f)_p(v) = dg_{f(p)}(df_p(v)) = f^*dg(p; v).$$

In generale, prendiamo un sistema di coordinate $x_1, \ldots, x_d$ di N e supponiamo che la restrizione di α all'aperto coordinato U abbia la forma

$$\alpha|_U = g dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}; \tag{11}$$

allora

$$(f^*\alpha)|_{f^{-1}(U)} = (g \circ f) d(x_{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge d(x_{i_k} \circ f).$$

Segue che

$$d(f^*\alpha)|_{f^{-1}(U)} = d(g \circ f) d(x_{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge d(x_{i_k} \circ f).$$

D'altra parte

$$(f^*d\alpha)|_{f^{-1}(U)} = f^*(dg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = f^*(dg) \wedge f^*dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

In generale, α si può scrivere come somma di elementi della forma (11), quindi per additività possiamo concludere. □

14 Coomologia di de Rham, [2]

Per p intero non negativo definiamo

$$Z^p(M) = \{\alpha \in \Omega^p(M) \mid d\alpha = 0\}; \quad B^p(M) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{p-1}(M)\}.$$

dove si pone $\Omega^{-1}(M) = 0$ per definizione, e quindi $B^0(M) = 0$. Gli elementi di $Z^p(M)$ si chiamano forme *chiuse*, mentre gli elementi di $B^p(M)$ si chiamano forme *esatte*. Poichè $d^2 = 0$, le forme esatte sono chiuse, e ha senso definire il quoziente

$$H^p(M) = \frac{Z^p(M)}{B^p(M)},$$

noto come p-esimo spazio di coomologia di de Rham[3]. Gli $H^p(M)$ così definiti sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$; in effetti possiamo pensare a

$$H(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} H^p(M)$$

come un'algebra graduata, quoziente delle algebre graduate $Z(M) = \ker d$ e $B(M) = \operatorname{Im} d$.

Esercizio 55. M è connessa se e solo se $H^0(M) = \mathbb{R}$.

Esercizio 56. Se $p > d$ è maggiore della dimensione di M^d, allora $H^p(M) = 0$.

Esercizio 57. Se $M = \{pt\}$ contiene un solo punto, allora

$$H^p(\{pt\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0 \\ 0 & p > 1 \end{cases}.$$

Esercizio 58. Se $M = \bigcup_{i\in I} M_i$, dove $M_i \subset M$ sono aperti disgiunti, allora

$$H^p(M) \cong \prod_{i\in I} H^p(M_i).$$

Diciamo che due mappe C^∞ $f, g\colon M \to N$ sono *omotope* (in senso C^∞) se esiste una mappa C^∞,

$$F\colon \mathbb{R}\times M \to N,$$

detta omotopia, tale che

$$F(0,\cdot) = f, \quad F(1,\cdot) = g.$$

Si scrive allora

$$f \sim g,$$

o anche $f \sim_F g$.

Esercizio 59. Se f e g sono mappe omotope, esiste un'omotopia $F\colon \mathbb{R}\times M \to N$ tale che

$$F(t,x) = f(x), \quad t \leq 0, \quad F(t,x) = g(x), \quad t \geq 1.$$

Esercizio 60. L'omotopia definisce una relazione di equivalenza sulle mappe da M in N.

Data una mappa $f\colon M \to N$ C^∞, f^* manda forme chiuse in forme chiuse e forme esatte in forme esatte, perchè commuta con d (Proposizione 50): quindi induce una mappa $f^\sharp$ mediante il diagramma

$$\begin{tikzcd} Z(N) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & Z(M) \arrow[d] \\ H(N) \arrow[r, "f^\sharp"] & H(M) \end{tikzcd}, \quad f^\sharp([\alpha]) = [f^*\alpha].$$

Teorema 51. *Se $f, g\colon M \to N$ sono mappe omotope, allora $f^\sharp = g^\sharp$.*

[3]Si usa talvolta la notazione $H^p_{dR}(M)$ per distinguere da altri tipi di coomologia.

Dimostrazione. Osserviamo che se U è un aperto coordinato in M con coordinate $x_1, \ldots, x_d$, allora $\mathbb{R} \times U$ è un aperto coordinato in $\mathbb{R} \times M$, con coordinate date da $t, x_1, \ldots, x_d$. Quindi una k-forma su $\mathbb{R} \times M$ è localmente somma di componenti del tipo

$$u(t,x)dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}, \quad u(t,x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

In particolare esite una mappa lineare

$$\Omega^k(\mathbb{R} \times M) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R} \times M), \quad \alpha \to \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, \alpha$$

definita localmente sui generatori da

$$\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, (udt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}) = udx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, (udx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = 0.$$

Sia $F \colon \mathbb{R} \times M \to N$ un'omotopia tra f e g. Definiamo mappe $h_k \colon \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$,

$$h_k(\alpha)(x) = \int_0^1 ds \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, F^*\alpha(s,x) \right).$$

L'integrale ha senso perchè $T_{s,x}(\mathbb{R} \times M) \cong \mathbb{R} \times T_x M$, quindi fissato x gli spazi $\Lambda_k(T^*_{s,x}(\mathbb{R} \times M))$ sono canonicamente isomorfi al variare di s. In altri termini, se

$$\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, F^*\alpha(s,x) = udx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}},$$

allora

$$h_k(\alpha)(x) = \left(\int_0^1 u(s,x)ds \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

Vogliamo dimostrare che

$$g^* - f^* = d \circ h_k + h_{k+1} \circ d \colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M). \tag{12}$$

In altri termini se $\beta = F^*\alpha \in \Omega(\mathbb{R} \times M)$, e $i_0, i_1 \colon M \to \mathbb{R} \times M$ sono le inclusioni

$$i_0(x) = (0,x), \quad i_1(x) = (1,x),$$

dobbiamo dimostrare

$$\begin{aligned} i_1^*\beta - i_0^*\beta &= (F \circ i_1)^*\alpha - (F \circ i_0)^*\alpha = g^*\alpha - f^*\alpha \\ &= dh_k\alpha + h_{k+1}d\alpha = d\int_0^1 ds \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, \beta \right) + \int_0^1 ds \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, d\beta \right). \end{aligned}$$

Se β ha la forma

$$\beta = udt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$$

allora $i_1^* dt = d(t \circ i_1) = 0$, e lo stesso vale per i_0, quindi

$$i_1^*\beta - i_0^*\beta = 0,$$

mentre $dh_k\alpha + h_{k+1}d\alpha$ in p è

$$
\begin{aligned}
d\left(\int_0^1 ds\left(u(s,p)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k-1}}\right)\right) &- \int_0^1 ds\left(\sum \frac{\partial}{\partial x_j}u(s,p)dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k-1}}\right)\\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_0^1 ds\left(u(s,p)dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k-1}}\right)\right)\\
&\quad - \int_0^1 ds\left(\sum \frac{\partial}{\partial x_j}u(s,p)dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k-1}}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Se invece β ha la forma

$$\beta = u dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

allora

$$i_1^*\beta(p) - i_0^*\beta(p) = (u(1,p)-u(0,p))dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Inoltre $dh_k\alpha + h_{k+1}d\alpha$ in p è

$$\int_0^1 ds\left(\frac{\partial u}{\partial t}(s,p)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right) = (u(1,p)-u(0,p))dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Poiché β è localmente somma di forme dei due tipi considerati, abbiamo dimostrato (12). Adesso osserviamo che se α è una forma chiusa,

$$g^*\alpha - f^*\alpha = dh_k\alpha + h_{k+1}d\alpha = dh_k\alpha$$

è una k-forma esatta; quindi

$$g^\sharp[\alpha] - f^\sharp[\alpha] = [g^*\alpha] - [f^*\alpha] = [dh_k\alpha] = 0. \qquad \square$$

Si dice che due varietà sono *omotopicamente equivalenti* (in senso C^∞) se esistono $f\colon M\to N$, $g\colon N\to M$ C^∞ tali che

$$f\circ g\sim \mathrm{Id},\quad g\circ f\sim\mathrm{Id}.$$

Si dice allora che f e g sono *equivalenze omotopiche* (in senso C^∞) e che sono l'una la *inversa omotopica* dell'altra. Si dice che una sottovarietà $M\subset N$ è un *retratto di deformazione* se esiste una retrazione $r\colon N\to M$ che ha l'inclusione $i\colon M\to N$ come inversa omotopica.

Corollario 52. *Se $f\colon M\to N$ è un equivalenza omotopica, allora*

$$f^\sharp\colon H(N)\to H(M)$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Sappiamo che $(g\circ f)^\sharp = f^\sharp\circ g^\sharp = \mathrm{Id}^\sharp$; d'altra parte $\mathrm{Id}^\sharp = \mathrm{Id}$. Allo stesso modo $g^\sharp\circ f^\sharp = \mathrm{Id}$. $\square$

Esercizio 61. Dimostrare che se $U\subset\mathbb{R}^n$ è un aperto stellato, allora

$$H^k(U) = \begin{cases}\mathbb{R} & k=0\\ 0 & k>1\end{cases}.$$

Esercizio 62. Dimostrare che $H(TM) \cong H(M)$.

Una successione

$$\cdots \to L_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} L_n \xrightarrow{f_n} L_{n+1} \to \cdots$$

dove gli L_i sono spazi vettoriali e le f_i sono applicazioni lineari si dice *esatta* se

$$\ker f_{n+1} = \operatorname{Im} f_n$$

per ogni n.

Osservazione. Le successioni

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \quad A \xrightarrow{g} B \to 0 \quad 0 \to A \xrightarrow{h} B \to 0$$

sono esatte se, rispettivamente, f è iniettiva, g è suriettiva, h è un isomorfismo.

Osservazione. La successione

$$\cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} \Omega^{n+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

non è mai esatta. Ad esempio, se $M = \{pt\}$, la successione diventa

$$0 \to \mathbb{R} \to 0 \to 0$$

che non è esatta. In generale, la successione può essere esatta se e solo se tutti gli $H^k(M)$ sono uguali a zero. Tuttavia, $H^0(M) = Z^0(M)$ contiene le funzioni costanti, quindi questo non accade mai.

Supponiamo adesso $M = U \cup V$ dove U, V sono aperti, e indichiamo con i_1, i_2, j_1, j_2 le mappe di inclusione:

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "i_1"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & & M \\
 & V \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Definiamo

$$d \colon \Omega(U) \oplus \Omega(V) \to \Omega(U) \oplus \Omega(V), \quad d(\eta, \xi) = (d\eta, d\xi).$$

Osserviamo che $d^2 = 0$, e

$$\ker d = Z(U) \oplus Z(V), \quad \operatorname{Im} d = B(U) \oplus B(V), \quad \frac{\ker d}{\operatorname{Im} d} \cong H(U) \oplus H(V).$$

Lemma 53. *Se si pone* $\alpha = (i_1^*, i_2^*)$, $\beta(\eta_1, \eta_2) = j_1^*\eta_1 - j_2^*\eta_2$, *la successione*

$$0 \to \Omega(M) \xrightarrow{\alpha} \Omega(U) \oplus \Omega(V) \xrightarrow{\beta} \Omega(U \cap V) \to 0 \tag{13}$$

è esatta; inoltre le mappe α *e* β *commutano con* d.

Dimostrazione. Innanzitutto α è iniettiva, perché se una forma è zero su U e su V allora lo è sull'unione.

Per definizione,

$$\beta(\alpha(\eta)) = j_1^* i_1^* \eta - j_2^* i_2^* \eta = 0$$

perché $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$. Quindi $\operatorname{Im} \alpha \subset \ker \beta$. Viceversa, se $\beta(\eta_1, \eta_2) = 0$, allora significa che η_1 e η_2 coincidono sull'intersezione $U \cap V$, quindi si incollano per definire una forma globale, cioè $\operatorname{Im} \alpha = \ker \beta$.

Mostriamo infine che β è suriettiva: data $\eta \in \Omega(U \cap V)$, prendiamo una partizione dell'unità subordinata a $\{U, V\}$. Per l'esercizio 8 possiamo supporre che la partizione sia composta da due sole funzioni ρ_1 e ρ_2, $\operatorname{supp} \rho_1 \subset U$, $\operatorname{supp} \rho_2 \subset V$. Adesso poniamo

$$\eta_1(x) = \begin{cases} \rho_1(x)\eta(x) & x \in U \cap V \\ 0 & x \in V \setminus (\operatorname{supp} \rho_1) \end{cases}$$

Per costruzione $\eta_1 \in \Omega(V)$. Analogamente definiamo η_2 in $\Omega(U)$,

$$\eta_2(x) = \begin{cases} \rho_2(x)\eta(x) & x \in U \cap V \\ 0 & x \in U \setminus (\operatorname{supp} \rho_2) \end{cases}$$

e quindi

$$\beta(\eta_2, -\eta_1) = \eta.$$

L'ultima affermazione è ovvia. □

Discende dal lemma che per ogni k abbiamo mappe indotte in coomologia

$$\alpha^\sharp \colon H^k(M) \to H^k(U) \oplus H^k(V), \quad \beta^\sharp \colon H^k(U) \oplus H^k(V) \to H^k(U \cap V).$$

La successione esatta (13) induce un'altra successione esatta:

Teorema 54 (Mayer-Vietoris)**.** *Se $M = U \cup V$ dove U, V aperti, allora esiste una successione esatta lunga di spazi vettoriali e applicazioni $\mathbb{R}$-lineari*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(M) \arrow[r, "\alpha^\sharp"] & H^0(U) \oplus H^0(V) \arrow[r, "\beta^\sharp"] & H^0(U \cap V) \arrow[dll, bend left, "\partial_0"'] \\ & H^1(M) \arrow[r, "\alpha^\sharp"] & \cdots \arrow[r, "\beta^\sharp"] & H^k(U \cap V) \arrow[dll, bend left, "\partial_k"'] \\ & H^{k+1}(M) \arrow[r, "\alpha^\sharp"] & H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \arrow[r, "\beta^\sharp"] & H^{k+1}(U \cap V) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Questa è una conseguenza puramente algebrica del lemma. Infatti abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^{k+1}(M) \arrow[r, "\alpha"] & \Omega^{k+1}(U) \oplus \Omega^{k+1}(V) \arrow[r, "\beta"] & \Omega^{k+1}(U \cap V) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Omega^k(M) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, "d"] & \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "d"] & \Omega^k(U \cap V) \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Omega^{k-1}(M) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, "d"] & \Omega^{k-1}(U) \oplus \Omega^{k-1}(V) \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "d"] & \Omega^{k-1}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0 \end{tikzcd}$$

dove le righe sono esatte. Per definire ∂_k, prendiamo $\eta \in Z^k(U \cap V)$ e scegliamo ξ, γ in modo da ottenere questo diagramma dal precedente:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & d\xi \arrow[r, "\alpha"] & 0 \arrow[r, "\beta"] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \xi \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, "d"] & d\gamma \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "d"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0 \\
 & & \gamma \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "d"] & \eta \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0
\end{tikzcd}
$$

Esplicitamente, usiamo la suriettività di β per scrivere $\eta = \beta(\gamma)$; allora $\beta(d\gamma) = d\eta = 0$, quindi per esattezza $d\gamma = \alpha(\xi)$ per qualche $\xi \in \Omega^k(M)$; inoltre $\alpha(d\xi) = d(\alpha(\xi)) = d^2\gamma = 0$, quindi ξ è chiusa e ha senso definire

$$\partial_k[\eta] = [\xi].$$

Bisogna verificare che $[\xi]$ non dipende dalle scelte fatte: infatti se $[\eta'] = [\eta]$, $\beta(\gamma') = \eta'$, $d\gamma' = \alpha(\xi')$, allora $\eta' - \eta = d(\beta(\omega))$ per qualche ω, quindi $\beta(\gamma' - \gamma - d\omega) = 0$ e dunque

$$\gamma' - \gamma - d\omega = \alpha(\rho)$$

per qualche ρ; dunque

$$d\gamma' - d\gamma = d(\alpha(\rho))$$

e

$$d\gamma' = \alpha(\xi + d\rho);$$

poichè α è iniettiva, $[\xi'] = [\xi + d\rho] = [\xi]$.

La linearità segue in modo ovvio dal fatto che tutte le mappe sono lineari.

Il fatto che $\partial_k \circ \beta^\sharp$ e $\alpha^\sharp \circ \partial_k$ siano zero segue dal diagramma; inoltre $\beta^\sharp \circ \alpha^\sharp = 0$ perchè $\beta \circ \alpha = 0$.

Per vedere che $\ker \partial_k = \operatorname{Im} \beta^\sharp$, supponiamo $\partial_k[\eta] = 0$ e consideriamo il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \xi \arrow[r, "\alpha"] & d\gamma \arrow[r, "\beta"] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega \arrow[u, "d"] & \gamma \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "d"] & \eta \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0
\end{tikzcd}
$$

da cui

$$d(\gamma - \alpha(\omega)) = 0, \quad \beta(\gamma - \alpha(\omega)) = \beta(\gamma) = \eta,$$

cioè

$$[\eta] = \beta^\sharp[\gamma - \alpha(\omega)].$$

Analogalmente per dimostrare $\ker \alpha^\sharp = \operatorname{Im} \partial_k$ supponiamo $\alpha^\sharp[\xi] = 0$ e usiamo il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \xi \arrow[r, "\alpha"] & d\gamma \arrow[r, "\beta"] & 0 \arrow[r] & 0 \\
 & & \gamma \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "d"] & \eta \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0
\end{tikzcd}
$$

Infine per verificare che $\ker \beta^\sharp = \operatorname{Im} \alpha^\sharp$ si prenda $[\gamma \in \ker \beta^\sharp$ e si consideri il diagramma

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\alpha"] & \gamma \arrow[r, "\beta"] & d\eta \arrow[r] & 0 \\ & \rho \arrow[r, "\beta"] & \eta \arrow[u, "d"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Allora $\gamma - d\rho$ è una forma chiusa in $\operatorname{Im} \alpha$, e quindi $[\gamma - d\rho] \in \operatorname{Im} \alpha^\sharp$. $\square$

Esempio. Sia $S^1 = U \cup V$, dove U è il complementare del polo nord e V il complementare del polo sud. Sappiamo che $H^0(S^1) = \mathbb{R}$ perché S^1 è connesso; inoltre $H^k(S^1) = 0$ per ragioni dimensionali. Per calcolare $H^1(S^1)$ usiamo la successione di Mayer Vietoris associata alla coppia $\{U, V\}$. L'aperto U è diffeomorfo a $\mathbb{R}$, quindi $H(U) = H(\{pt\})$. Inoltre $U \cap V$ è unione disgiunta di due archi, quindi $H(U \cap V) \cong H(\{p, q\})$. Dunque la successione di Mayer Vietoris ha la forma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(S^1) \arrow[r, "\alpha^\sharp"] & H^0(U) \oplus H^0(V) \arrow[r, "\beta^\sharp"] & H^0(U \cap V) \arrow[r, "\partial_0"] & H^1(S^1) \arrow[r] & H^1(U) \oplus H^1(V) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \arrow[r] & ? \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si può concludere usando la formula di Grassmann che

$$1 = \dim \operatorname{Im} \alpha^\sharp = \dim \ker \beta^\sharp \implies \dim \ker \partial_0 = \dim \operatorname{Im} \beta^\sharp = 1$$

e quindi $H^1(S^1)$ ha dimensione uno. Se si vuole essere più espliciti, possiamo rappresentare $H^0(U \cap V)$ come lo spazio delle funzioni

$$f_{\lambda\mu} \colon U \cap V \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \lambda & x > 0 \\ \mu & x < 0 \end{cases}.$$

L'immagine di $\beta^\sharp$ è caratterizzata da $\lambda = \mu$.

Adesso se ρ_1, ρ_2 è una partizione dell'unità subordinata a $\{U, V\}$,

$$f_{\lambda\mu} = \beta((\rho_2 f_{\lambda\mu})|_U, -(\rho_1 f_{\lambda\mu})|_V)$$

e quindi $[\xi] = \partial_0([f_{\lambda\mu}])$ è caratterizzato da

$$(f_{\lambda\mu} d\rho_2, -f_{\lambda\mu} d\rho_1) = \alpha(\xi),$$

cioé $\xi \in \Omega^1(S^1)$ è caratterizzato da

$$\xi|_U = f_{\lambda\mu} d\rho_2, \quad \xi|_V = -f_{\lambda\mu} d\rho_1;$$

poiché $d\rho_1 + d\rho_2 = 0$, possiamo scrivere

$$\xi = f_{\lambda\mu} d\rho_2.$$

Questa forma è esatta quando $\lambda = \mu$, perché in tal caso $f_{\lambda\lambda}\rho_2$ è una funzione C^∞ su S^1. Se $\lambda \neq \mu$, la sua immagine in $H^1(S^1)$ è un generatore.

15 Applicazioni

Esercizio 63. Sia θ la coordinata locale standard su S^1,

$$p = (\cos\theta(p), \sin\theta(p)).$$

Dimostrare che la 1-forma locale $d\theta$ si estende a una 1-forma γ su S^1 e $[\gamma]$ è un generatore di $H^1(S^1)$.

Esercizio 64. Dimostrare che se $f\colon S^1 \to S^1, \quad f(z) = z^n$, allora

$$f^\sharp\colon H^1(S^1) \to H^1(S^1), \quad f^\sharp[\omega] = n[\omega].$$

Esercizio 65. Sia $f\colon S^1 \to \mathbb{RP}^1$ la mappa $f(x,y) = [x:y]$. Dimostrare che f è C^∞ e $df_p \neq 0$ in ogni punto. Costruire un diffeomorfismo $g\colon \mathbb{RP}^1 \to S^1$ tale che

$$(g\circ f)^\sharp\colon H^1(S^1) \to H^1(S^1), \quad (g\circ f)^\sharp = 2\mathrm{Id}.$$

Proposizione 55. *La coomologia di de Rham della sfera è data da*

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, n \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}.$$

Dimostrazione. Si procede per induzione su n. Per $n = 1$ l'abbiamo già visto. Per il passo induttivo, sia $n > 1$, e siano U e V i complementari dei poli. Allora $S^{n-1} \times \{0\}$ è un retratto di deformazione di $U \cap V$. Quindi la successione di Mayer-Vietoris dà

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(S^n) \arrow[r, "\alpha^\sharp"] & H^0(U) \oplus H^0(V) \arrow[r, "\beta^\sharp"] & H^0(U\cap V) \arrow[r, "\partial_0"] & H^1(S^n) \arrow[r] & H^1(U)\oplus H^1(V) \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & ? \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

da cui si vede che $\beta^\sharp$ è suriettivo, e quindi $H^1(S^n) = 0$. Inoltre per $k > 0$ la successione esatta

$$H^k(U)\oplus H^k(V) \xrightarrow{\beta^\sharp} H^k(U\cap V) \xrightarrow{\partial_k} H^{k+1}(S^n) \longrightarrow H^{k+1}(U)\oplus H^{k+1}(V)$$

implica $H^k(S^{n-1}) \cong H^{k+1}(S^n)$. $\square$

Esercizio 66. Dimostrare che se $f\colon S^n \to S^m$ è un'equivalenza omotopica C^∞, allora $n = m$.

Per estendere questo risultato al caso continuo, avremo bisogno del seguente teorema di approssimazione.

Teorema 56. *Sia M una varietà e A una sottovarietà regolare chiusa di M. Sia $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua per cui la restrizione $f|_A\colon A \to \mathbb{R}^n$ sia C^∞. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste una $g\colon M \to \mathbb{R}^n$ C^∞ tale che $g|_A = f|_A$ e $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ per ogni x.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 30, esiste $h\colon M \to \mathbb{R}^n$ C^∞ che estende f. Quindi esiste un intorno $V \supset A$ dove

$$|h(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Per ogni $x \notin A$ consideriamo l'intorno

$$V_x = \{y \in M \setminus A \mid |f(x) - f(y)| < \epsilon\};$$

sia $h_x\colon V_x \to \mathbb{R}$ la mappa costante $h_x(y) = f(x)$. Per ogni $x \in A$, poniamo $V_x = V$ e $h_x = h$.

Prendiamo una partizione dell'unità ρ_k subordinata a $\{V_x\}$. Poniamo adesso

$$g = \sum_k \rho_k h_{x_k}.$$

Adesso g è C^∞ perchè le $h_{x_k}\colon V_{x_k} \to \mathbb{R}^n$ sono C^∞. Inoltre se $x \in A$, allora $g(x) = f(x)$; infatti $\rho_k = 0$ su A se $x_k \notin A$. Quindi

$$g(x) = \sum_{x_k \in A} \rho_k(x) h_{x_k}(x) = \sum_{x_k \in A} \rho_k(x) f(x) = f(x).$$

Se invece $y \notin A$, allora

$$\begin{aligned}
|g(y) - f(y)| &= \left|\sum_k \rho_k(y) h_{x_k}(y) - f(y)\right| = \\
&\left|\sum_k \rho_k(y)(h_{x_k}(y) - f(y)) + \sum_k \rho_k(y) f(y) - f(y)\right| = \\
&\left|\sum_k \rho_k(y)(h_{x_k}(y) - f(y))\right| < \sum_k \rho_k(y)\epsilon = \epsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

Ricordiamo che due mappe continue $f, g\colon X \to Y$ sono omotope (in senso continuo) se esiste $F\colon [0,1] \times X \to Y$ continua con $F(0,\cdot) = f$, $F(1,\cdot) = g$. Analogamente si definisce la nozione di equivalenza omotopica continua, etc.

Corollario 57. *Se $f\colon S^n \to S^m$ è un'equivalenza omotopica continua, allora $n = m$.*

Dimostrazione. Si applica il teorema con $\epsilon = 1$ alla funzione $S^n \to \mathbb{R}^{m+1}, x \to f(x)$ e si ottiene $g\colon S^n \to \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ funzione C^∞ tale che per ogni x

$$|g(x) - f(x)| < 1.$$

Allora

$$F\colon [0,1] \times S^n \to S^m, \quad F(t,x) = \frac{tf(x) + (1 - tg(x)}{|tf(x) + (1-t)g(x)|}$$

è continua perché $f(x)$ e $g(x)$ sono linearmente dipendenti solo se coincidono e definisce un'omotopia continua tra f e

$$f_1\colon S^n \to S^m, \quad f_1(x) = g(x)/\left|g(x)\right|.$$

Analogamente l'inversa omotopica di f è omotopa a una mappa C^∞

$$f_2 \colon S^m \to S^n.$$

Per costruzione $f_1 \circ f_2$ e $f_2 \circ f_1$ sono omotope all'identità. Tuttavia a priori l'omotopia è solo continua: mostriamo che può essere presa C^∞. Sia

$$G \colon \mathbb{R} \times S^n \to S^n, \quad G(0,\cdot) = f_2 \circ f_1, \quad G(1,\cdot) = \mathrm{Id}$$

un'omotopia continua. Allora G è C^∞ sulla sottovarietà regolare $A = \{0,1\} \times S^n$. Quindi esiste H C^∞ che coincide con G su A e $|G - H| < 1$. Adesso la mappa

$$(t,x) \to \frac{H(t,x)}{|H(t,x)|}.$$

dà l'omotopia cercata. Lo stesso vale per $f_1 \circ f_2$, quindi S^n e S^m sono omotopicamente equivalenti nel senso C^∞ e si può applicare la proposizione. □

Esercizio 67. Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1}.

Esercizio 68. Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sono omeomorfi se e solo se $n = m$.

Esercizio 69. Sia

$$0 \xrightarrow{f_0} L_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} L_n \xrightarrow{f_n} 0$$

una successione esatta. Allora

$$\sum (-1)^k \dim L_k = 0.$$

Esercizio 70. Si calcoli la coomologia di de Rham di $S^1 \times S^1$.

Esercizio 71. Si calcoli la coomologia di de Rham di $(S^1)^k$.

Esercizio 72. Dimostrare che la coomologia di de Rham di $\mathbb{RP}^2$ è

$$H^k(\mathbb{RP}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

Esercizio 73. Dimostrare che $\mathbb{CP}^1$ ha la stessa coomologia di S^2 (in effetti si può dimostrare che sono diffeomorfi).

Esercizio 74. Dimostrare che la coomologia di de Rham di $\mathbb{CP}^2$ è

$$H^k(\mathbb{CP}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0,2,4 \\ 0 & k = 1,3 \end{cases}$$

16 Esercizi

Esercizio 75. Sia M una varietà e sia α una 1-forma su M. Dimostrare che:

(i) in coordinate locali $x_1, \dots, x_d$

$$d\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right);$$

(ii) l'applicazione

$$\xi\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M), \quad \xi(X,Y)=d\alpha(X,Y)$$

è $C^\infty(M)$-bilineare;

(iii) l'applicazione

$$\gamma\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M), \quad \gamma(X,Y)=X\alpha(Y)-Y\alpha(X)-\alpha([X,Y])$$

è $C^\infty(M)$-bilineare;

(iv) per ogni punto p e ogni X,Y campi di vettori, $\gamma(X,Y)(p)$ dipende solo da X_p e Y_p.

(v) per ogni X,Y campi di vettori vale

$$d\alpha(X,Y)=X\alpha(Y)-Y\alpha(X)-\alpha([X,Y]).$$

Supponiamo adesso che $d\alpha=0$ e $\alpha_p\neq 0$ per ogni p. Dimostrare che :

(vi) intorno a ogni punto di M esiste un sistema di coordinate $x_1,\dots,x_d$ tale che $\alpha=dx_1$;

(vii) l'insieme

$$D=\{(p;v)\in TM \mid \alpha_p(v)=0\}$$

è una distribuzione.

(viii) D è integrabile.

Esercizio 76. Si indichino con x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 le coordinate standard su $\mathbb{R}^6=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$; sia

$$M=\left\{(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=1=(y_1)^2-(y_2)^2-(y_3)^2\right\}.$$

Si considerino i campi di vettori su $\mathbb{R}^6$

$$X=x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad Y=y_1\frac{\partial}{\partial y_2}+y_2\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

(i) Si dimostri che M è una sottovarietà regolare di $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$.

(ii) Indicata con $i\colon M\to\mathbb{R}^6$ l'inclusione, si dimostri che esistono campi di vettori $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ su M i-correlati rispettivamente, a X e Y.

(iii) Calcolare $[\tilde{X},\tilde{Y}]$.

(iv) Determinare se

$$D=\left\{(p;v)\in TM \mid v\in \operatorname{Span}\left\{\tilde{X}_p,\tilde{Y}_p\right\}\right\}$$

è una distribuzione e, in caso affermativo, se è involutiva.

(v) Determinare se la proiezione

$$\pi\colon M\to S^2, \quad (x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)\to(x_1,x_2,x_3)$$

è un'equivalenza omotopica.

(vi) Calcolare la coomologia di de Rham di M.

Esercizio 77. Sia

$$M = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}, \quad U = \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad V = \mathbb{C} \setminus \{-1\}.$$

(i) Si calcoli la coomologia di de Rham di U, V e M.

(ii) Sia $\tilde{\phi}\colon U \to V$, $\tilde{\phi}(z) = \frac{z+3}{1-z}$. Dimostrare che $\tilde{\phi}$ è ben definita; dimostrare che è un diffeomorfismo.

(iii) Sia $\phi\colon M \to M$ la mappa definita dalla commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, hook] & M \arrow[d, hook] \\ U \arrow[r, "\tilde{\phi}"] & V \end{tikzcd}$$

dove le frecce verticali sono inclusioni. Dimostrare che ϕ è ben definita e

$$\phi^\sharp\colon H^1(M) \to H^1(M)$$

è un isomorfismo.

(iv) Determinare se

$$\phi^\sharp\colon H^1(M) \to H^1(M)$$

è un multiplo dell'identità.

Riferimenti bibliografici

[1] Bredon, Topology and Geometry

[2] Greub Halperin Vanstone, Connections Curvature and Cohomology Vol. 1

[3] Hartman, Ordinary Differential Equations

[4] Lang, Fundamentals of Differential Geometry

[5] Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups